

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR

M. A. AURIC,

Ingénieur des Ponts et Chaussées à Montélimar (Drôme).

1[re] THÈSE. — Les équations linéaires et leurs applications.

2[e] THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 11 ~~juin~~ juillet 1893 devant la Commission d'Examen.

MM. COLLET, *Président.*

ASTOR, SAUVAGE, *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

ACADÉMIE DE GRENOBLE.

FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE.

	MM.	
Doyen	RAOULT	Chimie.
Professeurs	COLLET	Calcul différentiel et intégral.
	ASTOR	Mécanique.
	KILIAN	Minéralogie et Géologie.
	JANET	Physique.
	LACHMANN	Botanique.
	PRUVOT	Zoologie.
Secrétaire	IMBERT.	

19684 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

A

MONSIEUR GAY,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES,
DIRECTEUR DU PERSONNEL AU MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS.

Hommage de profond respect.

PREMIÈRE THÈSE.

LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

ET LEURS APPLICATIONS.

INTRODUCTION.

Lorsqu'on a à résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues, on met en général la solution sous la forme d'un quotient de deux déterminants.

Au point de vue arithmétique, au point de vue de l'évaluation numérique des solutions, cette forme est suffisante; mais il n'en est pas de même, à notre avis, au point de vue littéral, au point de vue des applications algébriques, et cela parce que les termes tout connus ne sont pas nettement séparés des coefficients des inconnues.

Lorsque les inconnues et les équations sont rangées dans un ordre déterminé, ce qui a lieu en général dans les systèmes algébriques, on peut éliminer d'abord la première inconnue entre les deux premières équations, puis les deux premières inconnues entre les trois premières équations,..., les p premières inconnues entre les $(p+1)$ premières équations..., et ainsi de suite.

On obtient ainsi un système qui peut remplacer le système proposé et dont la solution est susceptible d'un grand nombre d'applications.

Le travail qui suit a pour objet la démonstration de cette solution fondamentale et l'exposition de quelques-unes des applications que l'on peut en faire.

Ces applications font l'objet de huit Chapitres :

I. Dans ce Chapitre, nous exposons quelques propriétés des déterminants qu'on peut déduire du théorème fondamental.

II. Ce Chapitre est consacré à la division des polynômes et à la loi de formation du quotient. On en déduit certaines identités algébriques, qu'il serait difficile de démontrer directement.

III. Dans ce Chapitre, nous étudions une classe spéciale de fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique entière.

IV. Nous exposons dans ce Chapitre une généralisation du procédé indiqué par Bernoulli pour obtenir la racine de module maximum d'une équation algébrique entière.

V. Ce Chapitre est consacré à l'établissement des relations qui existent entre les coefficients d'une équation algébrique entière, entre les sommes des puissances semblables des racines de cette équation et entre les fonctions symétriques dont l'étude fait l'objet du Chapitre III.

VI. Dans ce Chapitre, nous donnons le développement le plus général d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une autre fonction, et nous en déduisons, comme cas particuliers, les développements de Paoli, de Taylor, de Wronski, d'Euler, de Bernoulli, de Bürmann et de Lagrange.

VII. Nous établissons dans ce Chapitre les formules de transformation d'une série en fraction continue par une voie directe; nous exposons une méthode de calcul des coefficients de ce nouveau développement et nous appliquons les formules trouvées à quelques séries simples $[\mathrm{L}(1+x), e^x, \operatorname{arc\,tang} x, \ldots]$.

VIII. Enfin nous donnons les solutions complètes des équations différentielles linéaires à coefficients constants, et nous terminons en disant quelques mots sur les méthodes d'approximation proposées par Wronski.

On se rend compte par cet exposé que ces applications, bien qu'incomplètes, sont assez nombreuses et diverses pour justifier l'appellation de *fondamentale* donnée à la solution qui nous a servi de point de départ.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues

(1) $$a_\mu^0 = a_\mu^1 x_1 + a_\mu^2 x_2 + \ldots + a_\mu^n x_n$$

dans lequel l'indice inférieur μ peut prendre les n valeurs

$$\mu = (1, 2, 3, \ldots, n).$$

Nous allons déterminer l'une quelconque des inconnues x_p, par exemple.

Considérons seulement les q premières inconnues et les q premières équations du système (1), ce qui suppose que ces inconnues et ces équations sont rangées dans un ordre déterminé.

Appelons D_q^q le déterminant obtenu dans cette hypothèse, D_q^i le déterminant obtenu en remplaçant dans D_q^q les éléments de la dernière colonne a_μ^q par les éléments correspondants a_μ^i.

Nous aurons, d'après les propriétés bien connues des déterminants, en éliminant les $q-1$ premières inconnues,

$$D_q^0 = D_q^q x_q + D_q^{q+1} x_{q+1} + \ldots + D_q^n x_n.$$

Nous poserons

$$\frac{D_q^i}{D_q^q} = \theta_q^i, \qquad \text{d'où} \qquad \theta_q^q = 1,$$

ce qui suppose que D_q^q n'est pas nul, et en donnant à q les $n-p+1$ valeurs

$$q = (p, p+1, p+2, \ldots, p+n),$$

nous obtenons le système

(2) $$\left\{\begin{array}{ll} \theta_p^0 & = x_p + \theta_p^{p+1} x_{p+1} + \theta_p^{p+2} x_{p+2} + \ldots + \theta_p^n \; x_n, \\ \theta_{p+1}^0 = & \qquad\quad x_{p+1} + \theta_{p+1}^{p+2} x_{p+2} + \ldots + \theta_{p+1}^n x_n, \\ \theta_{p+2}^0 = & \qquad\qquad\qquad\quad x_{p+2} + \ldots + \theta_{p+2}^n x_n, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_n^0 \; = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n \end{array}\right.$$

La résolution du système (2) nous donne

$$x_p = \sum (-1)^{\varpi} \theta^0_{\mu} \theta^{p+1}_{\mu_1} \theta^{p+2}_{\mu_2} \dots \theta^n_{\mu_{n-\nu}}, \tag{3}$$

μ_i pouvant prendre les valeurs

$$\mu_i = (p, p+1, p+2, \dots, p+i),$$

les indices

$$\mu, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \dots, \quad \mu_{n-p}$$

étant les indices exclusifs

$$p, \quad p+1, \quad p+2, \quad \dots, \quad n$$

pris dans un ordre déterminé et ϖ le nombre de transpositions qu'il faut faire pour passer de la suite

$$\mu, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \dots, \quad \mu_{n-p}$$

à la suite

$$p, \quad p+1, \quad p+2, \quad \dots, \quad n.$$

Il nous faut donc déterminer la suite des indices μ.

Posons

$$\mu_i = p + i - \rho_i;$$

alors ρ_i pourra prendre les valeurs

$$\rho_i = (0, 1, 2, \dots, i)$$

et la formule (3) deviendra, en donnant à μ la valeur $p+k$,

$$x_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} \theta^0_{p+k} \sum (-1)^{\nu} \theta^{p+1}_{p+1-\rho_1} \theta^{p+2}_{p+2-\rho_2} \dots \theta^n_{n-\rho_{n-p}}, \tag{4}$$

avec les conditions

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{n-p} = k, \\ & p + i - \rho_i \neq p + j - \rho_j, \\ \text{d'où} & \\ & i - \rho_i \neq j - \rho_j, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

qui sont la conséquence de ce fait que

$$\mu, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \dots, \quad \mu_{n-p}$$

sont les indices exclusifs

$$p, \quad p+1, \quad p+2, \quad \ldots, \quad n.$$

Ceci posé, soient ν nombres différents de zéro,

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_\nu$$

satisfaisant à l'équation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k.$$

Considérons la suite

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_{n-p}$$

dans laquelle les ρ différents de zéro forment une suite identique à celle des λ.

Si

$$\rho_j = \lambda_i,$$

il faut nécessairement que

$$\rho_{j-\lambda_i} \neq 0,$$

car sinon on aurait

$$j - \rho_j = (j - \lambda_i) - \rho_{j-\lambda_i}$$

et la deuxième condition (5) ne serait plus remplie.

Cette remarque définit la position relative des ρ différents de zéro.

En outre, on a nécessairement

$$\rho_{\lambda_1} = \lambda_1,$$

car $\rho_{\lambda_1 - i}$ ne peut prendre que les valeurs

$$\rho_{\lambda_1 - i} = (0, 1, 2, \ldots \lambda_1 - i),$$

et si l'on avait

$$\rho_{\lambda_1 + i} = \lambda_1,$$

ρ_i étant nul par hypothèse, puisque $\rho_{\lambda_1 + i}$ serait le premier ρ différent de zéro, on aurait

$$(\lambda_1 + i) - \rho_{\lambda_1 + i} = i - \rho_i$$

et la deuxième condition (5) ne serait plus remplie.

La suite des ρ est donc la suivante :

$$\text{o o}, \ldots, \text{o}\,\lambda_1\,\text{o o}, \quad \ldots, \text{o}\,\lambda_2\,\text{o o}, \ldots, \quad \text{o}\,\lambda_\nu\,\text{o o o}, \ldots, \text{o},$$

λ_i étant précédé de $(\lambda_i - 1)$ zéros.

Il en résulte que la suite

$$\mu, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_{n-p}$$

est la suivante :

$$\begin{gathered} p+k, p+1, p+2, \ldots, \quad p+\lambda_1-1, p, p+\lambda_1+2, \ldots, \quad p+\lambda_1+\lambda_2-1, \\ p+\lambda_1, p+\lambda_1+\lambda_2+1, p+\lambda_1+\lambda_2+2, \ldots, \\ p+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu-1, \quad p+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\nu-1}, \\ p+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu+1, \quad p+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu+2, \quad \ldots \quad n. \end{gathered}$$

On se rend facilement compte que le nombre ϖ des transpositions est égal à ν, puisqu'on passe d'une suite à l'autre en opérant ν transpositions successives

$$\begin{gathered} (p+k, p), \quad (p+k, p+\lambda_1), \quad (p+k, p+\lambda_1+\lambda_2), \quad \ldots, \\ (p+k, p+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\nu-1}); \end{gathered}$$

on obtient donc finalement

$$(6) \qquad x_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} \theta^0_{p+k} \sum (-1)^\nu \theta_p^{p+\lambda_1} \theta_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \ldots \theta_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k},$$

avec la condition

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k.$$

Posons, pour abréger,

$$(7) \qquad T_p^{p+k} = \sum (-1)^\nu \theta_p^{p+\lambda_1} \theta_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \ldots \theta_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k},$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k.$$

La formule (6) devient

$$(8') \qquad x_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} \theta^0_{p+k} T_p^{p+k},$$

relation tout à fait comparable, ainsi que nous allons encore

mieux le montrer, à la première équation du système (2) qu'on peut écrire

$$(2') \qquad \theta_p^0 = \sum_{k=0}^{k=n-p} x_{p+k}\,\theta_p^{p+k}.$$

La formule (8′), dans laquelle on fait successivement

$$p = (p, p+1, p+2, \ldots, n),$$

donne naissance au système suivant

$$(8) \qquad \begin{cases} x_p = \theta_p^0 + T_p^{p+1}\theta_{p+1}^0 + T_p^{p+2}\theta_{p+2}^0 + \ldots + T_p^n\theta_n^0, \\ x_{p+1} = \theta_{p+1}^0 + T_{p+1}^{p+2}\theta_{p+2}^0 + \ldots + T_{p+1}^n\theta_n^0, \\ x_{p+2} = \theta_{p+2}^0 + \ldots + T_{p+2}^n\theta_n^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \theta_n^0. \end{cases}$$

Ce système est, sauf les notations, identique au système (2); on peut donc lui appliquer la formule (6), et il vient

$$(6') \qquad \theta_p^0 = \sum_{k=0}^{k=n-p} x_{p+k} \sum (-1)^\nu T_p^{p+\lambda_1} T_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \ldots T_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k},$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k.$$

En comparant cette relation avec la relation (2′), on trouve

$$(7') \qquad \theta_p^{p+k} = \sum (-1)^\nu T_p^{p+\lambda_1} T_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \ldots T_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k,$$

car θ_p^0 est formé avec les éléments des p premières équations, et, en faisant abstraction des $n-p$ équations suivantes, l'élimination des p premières inconnues doit conduire à des résultats identiques.

Les formules (7) et (7′) montrent que les symboles

$$\theta_p^{p+k} \quad \text{et} \quad T_p^{p+k}$$

sont réciproques.

En remplaçant dans la relation (2') x_{p+k} par sa valeur tirée de la relation (8'), on a

$$\theta_p^0 = \sum_{k=0}^{k=n-p} \theta_p^{p+k} \sum_{i=0}^{i=n-p-k} \theta_{p+k+i}^0 \, T_{p+k}^{p+k+i}.$$

Dans cette relation θ_p^0, θ_{p+k+i}^0 ont une valeur arbitraire; cette relation est donc une identité et l'on a, en particulier, en annulant le coefficient de θ_{p+j}^0 dans le second membre,

$$(9) \qquad \sum_{k=0}^{k=j} \theta_p^{p+k} \, T_{p+k}^{p+j} = 0 \qquad (j \neq 0).$$

Cette relation développée s'écrit

$$T_p^{p+j} + \theta_p^{p+1} T_{p+1}^{p+j} + \theta_p^{p+2} T_{p+2}^{p+j} + \ldots + \theta_p^{p+j-1} T_{p+j-1}^{p+j} + \theta_p^{p+j} = 0.$$

En particulier, pour $j = 1$, on a

$$(9') \qquad T_p^{p+1} + \theta_p^{p+1} = 0.$$

De même, en remplaçant dans la relation (8') θ_{p+k}^0 par sa valeur tirée de l'équation (2'), on a

$$x_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} T_p^{p+k} \sum_{i=0}^{i=n-p-k} x_{p+k+i} \, \theta_{p+k}^{p+k+i}.$$

Comme précédemment, cette relation est une identité et l'on a, en particulier, en annulant le coefficient de x_{p+j} dans le second membre,

$$(9'') \qquad \sum_{k=0}^{k=j} T_p^{p+k} \, \theta_{p+k}^{p+j} = 0 \qquad (j \neq 0).$$

Cette relation développée s'écrit

$$\theta_p^{p+j} + T_p^{p+1} \theta_{p+1}^{p+j} + T_p^{p+2} \theta_{p+2}^{p+j} + \ldots + T_p^{p+j-1} \theta_{p+j-1}^{p+j} + T_p^{p+j} = 0.$$

Pour $j = 1$, on retrouve la relation ci-dessus.

Lorsque le nombre des inconnues et des équations n augmente indéfiniment :

Si les inconnues et les équations sont rangées dans un ordre déterminé;

Si aucun des déterminants de la suite infinie

$$D_p^p, \quad D_{p+1}^{p+1}, \quad D_{p+2}^{p+2}, \quad \ldots$$

n'est nul;

Si la suite des valeurs obtenues pour x_p par la formule (8′), en prenant successivement les

$$p, \quad p+1, \quad p+2, \quad \ldots$$

premières inconnues et équations, converge vers une valeur bien déterminée :

On peut dire que cette valeur limite est la solution x_p de ce système infini.

APPLICATIONS.

I. — Digression sur les déterminants.

Dans le système (1) résolu précédemment, considérons plus particulièrement les inconnues

$$x_p, \quad x_{p+q},$$

nous aurons, par l'application de la formule (8′),

$$x_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} \theta_{p+k}^0 \, T_p^{p+k},$$

$$x_{p+q} = \sum_{k=0}^{k=n-p-q} \theta_{p+q+k}^0 \, T_{p+q}^{p+q+k}.$$

Considérons maintenant un système d'équations linéaires iden-

tique au système (1), mais dans lequel on aurait donné à l'inconnue x_p le rang $(p+q)$ et à l'inconnue x_{p+q} le rang p.

Appelons

$$(\theta')^0_{p+k}, \quad (\mathrm{T}')^{p+k}_p$$

les symboles obtenus dans cette hypothèse; on aura

$$x_{p+q} = \sum_{k=0}^{k=n-p} (\theta')^0_{p+k}(\mathrm{T}')^{p+k}_p,$$

$$x_p = \sum_{k=0}^{k=n-p-q} (\theta')^0_{p+q+k}(\mathrm{T}')^{p+q+k}_{p+q},$$

et, en égalant les deux expressions de x_p, x_{p+q}, on obtient deux relations très générales entre les symboles θ, T, θ', T'.

En particulier, si

$$p = n-1, \qquad q = 1,$$

on trouve

$$x_{n-1} = \theta^0_{n-1} + \theta^0_n \mathrm{T}^n_{n-1} = (\theta')^0_n,$$

et comme nous avons [formule (9')]

$$\mathrm{T}^n_{n-1} + \theta^n_{n-1} = 0,$$

il vient

$$\theta^0_{n-1} - \theta^0_n \theta^n_{n-1} = (\theta')^0_n. \tag{10}$$

Nous allons développer cette relation (10).

Considérons le déterminant D^0_{n+1} avec la même notation que précédemment et appelons

$$\mathrm{D}^0_{n+1}(a^i_j),$$

ou plus simplement

$$\mathrm{D}(a^i_j)$$

le mineur obtenu par abstraction de la ligne j et de la colonne i.

On aura alors

$$\theta_{n-1}^{0} = \frac{D(a_n^{n-1}\, a_{n+1}^{n})}{D(a_n^{n}\, a_{n+1}^{n+1})}, \qquad \theta_n^{0} = \frac{D(a_{n+1}^{n})}{D(a_{n+1}^{n+1})},$$

$$\theta_{n-1}^{n} = \frac{D(a_n^{n-1}\, a_{n+1}^{n+1})}{D(a_n^{n}\, a_{n+1}^{n+1})}, \qquad (\theta')_n^{0} = -\frac{D(a_{n+1}^{n-1})}{D(a_{n+1}^{n+1})}.$$

La relation (10) devient donc, en chassant les dénominateurs,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & D(a_n^{n-1}\, a_{n+1}^{n})\, D(a_{n+1}^{n+1}) \\ & - D(a_n^{n-1}\, a_{n+1}^{n+1})\, D(a_{n+1}^{n}) = - D(a_{n+1}^{n-1})\, D(a_n^{n}\, a_{n+1}^{n+1}). \end{aligned} \right.$$

En remarquant que

$$D(a_n^{i}\, a_{n+1}^{j}) = - D(a_n^{j}\, a_{n+1}^{i}),$$

on peut donner à la relation (11) la forme équivalente

$$(11') \quad \begin{vmatrix} D(a_{n+1}^{n-1}\, a_n^{n}) & D(a_{n+1}^{n-1}\, a_n^{n+1}) \\ D(a_{n+1}^{n}) & D(a_{n+1}^{n+1}) \end{vmatrix} = D(a_{n+1}^{n-1})\, D(a_n^{n}\, a_{n+1}^{n+1}),$$

relation qui sera utilisée au Chapitre VII.

En amenant une inconnue quelconque x_i au rang $n-1$, on obtiendrait la relation

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & D(a_n^{i}\, a_{n+1}^{n})\, D(a_{n+1}^{n+1}) - D(a_n^{i}\, a_{n+1}^{n+1})\, D(a_{n+1}^{n}) \\ & \quad = - D(a_{n+1}^{i})\, D(a_n^{n}\, a_{n+1}^{n+1}) \end{aligned} \right\} \; i = (1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

On a, en outre, les identités

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} & - D(a_n^{n} \quad a_{n+1}^{n+1})\, D(a_{n+1}^{n}) = - D(a_{n+1}^{n})\, D(a_n^{n}\, a_{n+1}^{n+1}), \\ & D(a_n^{n+1}\, a_{n+1}^{n})\, D(a_{n+1}^{n+1}) = - D(a_{n+1}^{n+1})\, D(a_n^{n}\, a_{n+1}^{n+1}). \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, par définition,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=n+1} a_{n+1}^{i}\, D(a_n^{i}\, a_{n+1}^{n}) = - \sum_{i=1}^{i=n+1} a_{n+1}^{i}\, D(a_{n+1}^{i}\, a_n^{n} \quad) = - D(a_n^{n}) \\ & \sum_{i=1}^{i=n} a_{n+1}^{i}\, D(a_n^{i}\, a_{n+1}^{n+1}) = - \sum_{i=1}^{i=n} a_{n+1}^{i}\, D(a_{n+1}^{i}\, a_n^{n+1}) = - D(a_n^{n+1}) \\ & \sum_{i=1}^{i=n+1} a_{n+1}^{i}\, D(a_{n+1}^{i}) \quad = D. \end{aligned} \right\} \; i \neq n.$$

En multipliant les équations (12), (12′) par les coefficients

$$a_{n+1}^1, \quad a_{n+1}^2, \quad \ldots, \quad a_{n+1}^{n+1}$$

et en les ajoutant, il viendra, par l'application des relations (13),

$$(14) \qquad -\mathrm{D}(a_n^n)\,\mathrm{D}(a_{n+1}^{n+1}) + \mathrm{D}(a_n^{n+1})\,\mathrm{D}(a_{n+1}^n) = -\mathrm{D}.\mathrm{D}(a_n^n\, a_{n+1}^{n+1}),$$

que l'on peut écrire

$$(14') \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{D}(a_n^n) & \mathrm{D}(a_n^{n+1}) \\ \mathrm{D}(a_{n+1}^n) & \mathrm{D}(a_{n+1}^{n+1}) \end{vmatrix} = \mathrm{D}.\mathrm{D}(a_n^n\, a_{n+1}^{n+1}).$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît une propriété connue des déterminants mineurs du déterminant réciproque.

Comme application de la formule (10), nous allons calculer l'expression

$$\mathrm{B}_n^{i+1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1\, a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2}\, a_1^{n+i} \\ 1 & a_2\, a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2}\, a_2^{n+i} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & a_n\, a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2}\, a_n^{n+i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1\, a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2}\, a_1^{n-1} \\ 1 & a_2\, a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2}\, a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & a_n\, a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2}\, a_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

que nous rencontrerons dans la suite.

Cette expression peut aussi s'écrire

$$\mathrm{B}_n^{i+1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1\, a_1^2\, a_1^3 & \ldots & a_1^{n-2} & 1 & a_1^{n+i} \\ a_2\, a_2^2\, a_2^3 & \ldots & a_2^{n-2} & 1 & a_2^{n+i} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_n\, a_n^2\, a_n^3 & \ldots & a_n^{n-2} & 1 & a_n^{n+i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1\, a_1^2\, a_1^3 & \ldots & a_1^{n-2} & 1 & a_1^{n-1} \\ a_2\, a_2^2\, a_2^3 & \ldots & a_2^{n-2} & 1 & a_2^{n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_n\, a_n^2\, a_n^3 & \ldots & a_n^{n-2} & 1 & a_n^{n-1} \end{vmatrix}};$$

avec cette notation, on a

$$\theta_n^0 = B_n^{i+1},$$

$$\theta_{n-1}^0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 a_1^2 a_1^3 & \ldots & a_1^{n-2} a_1^{n+i} \\ a_2 a_2^2 a_2^3 & \ldots & a_2^{n-2} a_2^{n+i} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-1} a_{n-1}^2 a_{n-1}^3 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} a_{n-1}^{n+i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 a_1^2 a_1^3 & \ldots & a_1^{n-2} & 1 \\ a_2 a_2^2 a_2^3 & \ldots & a_2^{n-2} & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_{n-1} a_{n-1}^2 a_{n-1}^3 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & 1 \end{vmatrix}} = (-1)^{n-2} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} B_{n-1}^{i+1},$$

$$\theta_{n-1}^n = (-1)^{n-2} a_1 a_2 \ldots a_{n-1},$$

$$(\theta')_n^0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 a_1^2 a_1^3 & \ldots & a_1^{n-2} a_1^{n-1} a_1^{n+i} \\ a_2 a_2^2 a_2^3 & \ldots & a_2^{n-2} a_2^{n-1} a_2^{n+i} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_n a_n^2 a_n^3 & \ldots & a_n^{n-2} a_n^{n-1} a_n^{n+i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 a_1^2 a_1^3 & \ldots & a_1^{n-1} & 1 \\ a_2 a_2^2 a_2^3 & \ldots & a_2^{n-1} & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_n a_n^2 a_n^3 & \ldots & a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix}} = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n B_n^i.$$

La formule (10) devient donc

$$(-1)^{n-2} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} B_{n-1}^{i+1} - (-1)^{n-2} a_1 a_2 \ldots a_{n-1} B_n^{i+1}$$
$$= (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n B_n^i$$

ou bien

(15) $$B_n^{i+1} = B_{n-1}^{i+1} + a_n B_n^i.$$

sous cette forme, on reconnaît que B_n^i est égal à la fonction symétrique

(15′) $$B_n^i = \sum_i a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_n^{\gamma_n},$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ étant des exposants positifs ou nuls satisfaisant à la relation

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = i.$$

En effet, on a bien

$$\sum_{i+1} a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_n^{\gamma_n} = \sum_{i+1} a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_{n-1}^{\gamma_{n-1}} + a_n \sum_i a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_n^{\gamma_n}.$$

Comme seconde application, nous allons considérer le déterminant

$$D_n^n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & \Delta a_3 & \dots & \Delta a_n \\ \Delta^2 a_1 & \Delta^2 a_2 & \Delta^2 a_3 & \dots & \Delta^2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} a_1 & \Delta^{n-1} a_2 & \Delta^{n-1} a_3 & \dots & \Delta^{n-1} a_n \end{vmatrix},$$

dans lequel les symboles Δ, Δ^2, ..., Δ^{n-1} représentent des différences successives.

Considérons le mineur $D_n^n(a_n^\lambda)$, obtenu par abstraction de la colonne λ et de la ligne n, et cherchons à déterminer la différence première de ce mineur.

En augmentant chaque élément de sa différence première et en développant le déterminant ainsi obtenu, on aura une somme de déterminants qui seront nuls s'il existe deux lignes identiques.

Le développement se réduira donc à la somme de n déterminants correspondant aux combinaisons de $n-1$ indices exclusifs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots, \quad n-1.$$

En d'autres termes, on aura

$$D_n^n(a_n^\lambda) + \Delta D_n^n(a_n^\lambda) = D_n^n(a_1^\lambda) + D_n^n(a_2^\lambda) + \dots + D_n^n(a_n^\lambda)$$

et, par suite,

$$\Delta D_n^n(a_n^\lambda) = D_n^n(a_1^\lambda) + D_n^n(a_2^\lambda) + \dots + D_n^n(a_{n-1}^\lambda). \tag{16}$$

Considérons maintenant la relation (14), que nous écrirons

$$\begin{vmatrix} D_n^n(a_\mu^\lambda) & D_n^n(a_\mu^n) \\ D_n^n(a_n^\lambda) & D_n^n(a_n^n) \end{vmatrix} = D_n^n\, D_n^n(a_\mu^\lambda\, a_n^n) = D_n^n\, D_{n-1}^{n-1}(a_\mu^\lambda).$$

Faisons dans cette égalité successivement

$$\mu = (1, 2, \dots, n-2, n-1),$$

il viendra, en tenant compte de la relation (16),

$$\begin{vmatrix} \Delta D_n^n(a_n^\lambda) & \Delta D_n^n(a_n^n) \\ D_n^n(a_n^\lambda) & D_n^n(a_n^n) \end{vmatrix} = D_n^n[D_{n-1}^{n-1}(a_{n-1}^\lambda) + \Delta D_{n-1}^{n-1}(a_{n-1}^\lambda)].$$

D'après la formule connue

$$u\,\Delta v - v\,\Delta u = u(u + \Delta u)\,\Delta \frac{v}{u},$$

on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_n^n(a_n^n)\,[\mathrm{D}_n^n(a_n^n) + \Delta\,\mathrm{D}_n^n(a_n^n)]\,\Delta \frac{\mathrm{D}_n^n(a_n^\lambda)}{\mathrm{D}_n^n(a_n^n)} \\ &\quad = \mathrm{D}_n^n[\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}(a_{n-1}^\lambda) + \Delta\,\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}(a_{n-1}^\lambda)]. \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\lambda = n - 1,$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_n^n(a_n^n) &= \mathrm{D}_{n-1}^{n-1}, \\ \mathrm{D}_{n-1}^{n-1}(a_{n-1}^{n-1}) &= \mathrm{D}_{n-2}^{n-2}, \\ \mathrm{D}_n^n(a_n^{n-1}) &= \mathrm{D}_{n-1}^n, \end{aligned}$$

il vient

(17) $$\frac{\mathrm{D}_n^n}{\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}} = \frac{\mathrm{D}_{n-1}^{n-1} + \Delta\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}}{\mathrm{D}_{n-2}^{n-2} + \Delta\mathrm{D}_{n-2}^{n-2}}\,\Delta \frac{\mathrm{D}_{n-1}^n}{\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}}.$$

Si les éléments de la dernière colonne, au lieu d'être

$$a_n,\quad \Delta a_n,\quad \Delta^2 a_n,\quad \ldots,\quad \Delta^{n-1} a_n,$$

avaient été

$$a_i,\quad \Delta a_i,\quad \Delta^2 a_i,\quad \ldots,\quad \Delta^{n-1} a_i,$$

on aurait obtenu de la même façon

(17′) $$\frac{\mathrm{D}_n^i}{\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}} = \frac{\mathrm{D}_{n-1}^{n-1} + \Delta\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}}{\mathrm{D}_{n-2}^{n-2} + \Delta\mathrm{D}_{n-2}^{n-2}}\,\Delta \frac{\mathrm{D}_{n-1}^i}{\mathrm{D}_{n-1}^{n-1}},$$

d'où, en divisant membre à membre (17′) et (17) et en posant, comme nous avons fait précédemment,

$$\frac{\mathrm{D}_p^i}{\mathrm{D}_p^p} = \theta_p^i,$$

il vient

(18) $$\theta_n^i = \frac{\Delta\theta_{n-1}^i}{\Delta\theta_{n-1}^n},$$

relations que nous utiliserons dans la suite.

II. — Division de deux polynômes.

Soit comme dividende le polynôme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

comme diviseur

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

et comme quotient

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.$$

On a identiquement

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = (1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$$

et, par suite, le système d'égalités

$$(19a) \qquad \begin{cases} a_0 = c_0, \\ a_1 = b_1 c_0 + c_1, \\ a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_p = b_p c_0 + b_{p-1} c_1 + \ldots + b_1 c_{p-1} + c_p. \end{cases}$$

Ce système, lu de bas en haut, est identique au système (2) si l'on pose

$$\theta^0_{p+k} = a_{p-k}, \qquad \theta^{p+\sigma}_p = b_\sigma;$$

on a donc [formule (6)]

$$(19) \qquad c_p = \sum_{k=0}^{k=p} a_{p-k} \sum (-1)^\nu b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k.$$

En particulier, si le dividende se réduit à l'unité

$$a_0 = 1, \qquad a_i = 0 \qquad (i > 0),$$

il vient pour les coefficients β_p du quotient

$$(20) \qquad \beta_p = \sum (-1)^\nu b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = p.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, les symboles β et b sont réciproques, et l'on a

$$(20') \qquad b_p = \sum (-1)^\nu \beta_{\lambda_1} \beta_{\lambda_2} \ldots \beta_{\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu=p,$$

ce qui était évident, *a priori*, puisque rien ne distingue le diviseur du quotient.

Avec la relation (20), la relation (19) s'écrit

$$c_p=\sum_{k=0}^{k=p} a_{p-k}\,\beta_k. \tag{19'}$$

Supposons que parmi les indices

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \ldots,\quad \lambda_\nu$$

il s'en trouve

ρ_1 égaux à 1,
ρ_2 » 2,
. . . . ,
ρ_p » p,

on aura les conditions

$$\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_p=\nu,$$
$$\rho_1+2\rho_2+\ldots+p\rho_p=p.$$

Le coefficient du terme

$$b_1^{\rho_1}b_2^{\rho_2}\ldots b_p^{\rho_p}$$

dans la formule (20) sera évidemment égal au nombre des permutations que l'on peut faire avec ν indices dont

ρ_1 sont égaux à 1,
ρ_2 » 2,
. . . . ,
ρ_p » p,

c'est-à-dire à

$$\frac{1^{\nu|1}}{1^{\rho_1|1}\,1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_p|1}}.$$

La formule (20) devient donc

$$\beta_p=\sum(-1)^\nu\,1^{\nu|1}\,\frac{b_1^{\rho_1}b_2^{\rho_2}\ldots b_p^{\rho_p}}{1^{\rho_1|1}\,1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_p|1}} \tag{20''}$$

avec les conditions énoncées plus haut.

Nous rappellerons le procédé indiqué par Hindenburg pour la résolution en nombres entiers positifs de l'équation indéterminée

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = p.$$

« On écrira sur une ligne l'unité $\nu - 1$ fois de suite, et en dernier lieu le nombre $p - \nu + 1$, ce qui forme la première solution. Parcourant ensuite les nombres qui forment cette combinaison, de même que ceux des combinaisons suivantes *de la droite à la gauche,* on s'arrêtera dans chacune à celui qui se trouve inférieur *de deux unités au moins* au dernier nombre sur la droite; on augmentera d'une unité le nombre auquel on se sera arrêté, et, conservant tous ceux qui se trouvent à sa gauche, on remplacera par ce même nombre *ainsi augmenté d'un* tous ceux qui sont à sa droite, excepté le dernier, à la place duquel il faudra chaque fois mettre le complément des autres, c'est-à-dire ce qu'il faut ajouter à leur somme pour trouver le nombre p. En observant cette règle, on passera avec facilité d'une combinaison à l'autre; la dernière sera celle à laquelle la règle ne pourra plus être appliquée. »

Exemple :

$p = 10.$ $\nu = 5.$

1	1	1	1	6
1	1	1	2	5
1	1	1	3	4
1	1	2	2	4
1	1	2	3	3
1	2	2	2	3
2	2	2	2	2

Revenons aux applications de la formule (20)

$$\frac{1}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

$$c_p = \sum (-1)^\nu b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = p.$$

Supposons que le dénominateur soit égal à

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

d'où

$$b_i = \frac{1}{1^{i|1}};$$

on aura

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

d'où

$$c_i = (-1)^i \frac{1}{1^{i|1}}.$$

La formule précédente donnera

$$(21) \qquad c_p = (-1)^p \frac{1}{1^{p|1}} = \sum (-1)^\nu \frac{1}{1^{\lambda_1|1}\, 1^{\lambda_2|1} \ldots 1^{\lambda_\nu|1}}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = p.$$

Supposons que le dénominateur soit égal à

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} x^2 + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} x^2 + \ldots,$$

d'où

$$b_i = \frac{n^{i|-1}}{1^{i|1}};$$

on aura

$$\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1} x + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} x^2 - \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} x^2 + \ldots,$$

d'où

$$c_i = (-1)^i \frac{n^{i|-1}}{1^{i|1}}.$$

La formule précédente donnera

$$(22) \qquad c_p = (-1)^p \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} = \sum (-1)^\nu \frac{n^{\lambda_1|-1}\, n^{\lambda_2|-1} \ldots n^{\lambda_\nu|-1}}{1^{\lambda_1|1}\, 1^{\lambda_2|1} \ldots 1^{\lambda_\nu|1}}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = p.$$

Considérons la fraction

$$\frac{x}{e^x - 1}$$

qui devient, après développement et simplification,

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{2.3.4}},$$

d'où

$$b_i=\frac{1}{2^{i|1}}.$$

Or, d'après la définition des nombres de Bernoulli, on a

$$\frac{x}{e^x-1}=1+\frac{B_1 x}{1}+\frac{B_2 x^2}{1.2}+\frac{B_3 x^3}{1.2.3}+\dots,$$

c'est-à-dire

$$c_i=\frac{B_i}{1^{i|1}},$$

d'où il vient

$$\frac{B_p}{1^{p|1}}=\sum(-1)^\nu\frac{1}{2^{\lambda_1|1}\,2^{\lambda_2|1}\dots 2^{\lambda_\nu|1}} \tag{23}$$

avec

$$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_\nu=p.$$

Considérons encore la fonction

$$\text{séc}\,x=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1^{6|1}}-\dots},$$

d'où

$$b_i=(-1)^i\frac{1}{1^{2i|1}},$$

si l'on considère x^2 comme la variable indépendante.

Or, d'après la définition des nombres d'Euler, on a

$$\text{séc}\,x=1+\frac{E_1 x^2}{1^{2|1}}+\frac{E_2 x^4}{1^{4|1}}+\frac{E_3 x^6}{1^{6|1}}+\dots$$

d'où

$$c_i=\frac{E_i}{1^{2i|1}}.$$

Il vient donc

$$\frac{E_p}{1^{2p|1}}=\sum(-1)^{\nu+p}\frac{1}{1^{2\lambda_1|1}\,1^{2\lambda_2|1}\dots 1^{2\lambda_\nu|1}} \tag{24}$$

avec

$$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_\nu=p.$$

Les considérations qui précèdent permettent de généraliser la notion des nombres de Bernoulli et d'Euler; on peut, en effet, adopter la définition suivante

$$\frac{M_{q,r}(p)}{1^{qp|1}} = \sum (-1)^\nu \frac{1}{r^{q\lambda_1|1} r^{q\lambda_2|1} \ldots r^{q\lambda_\nu|1}}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = p;$$

avec cette notation, les coefficients binomiaux s'expriment, au signe près, par le symbole

$$M_{1,1}(p);$$

les nombres de Bernoulli par

$$M_{1,2}(p),$$

et les nombres d'Euler par

$$M_{2,1}(p).$$

On voit, en outre, que ces nombres sont intimement liés à l'étude des fonctions dérivées (sécante, tangente) des sinus d'ordre supérieur.

En effet, considérons le $(r-1)^{\text{ième}}$ sinus d'ordre supérieur q

$$r = (1, 2, \ldots, q),$$

savoir celui qui est donné par le développement suivant

$$\begin{aligned} S_{q,r-1}(x) &= \frac{x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \frac{x^{q+r-1}}{1^{q+r-1|1}} + \frac{x^{2q+r-1}}{1^{2q+r-1|1}} + \ldots \\ &= \frac{x^{r-1}}{1^{r-1|1}}\left(1 + \frac{x^q}{r^{q|1}} + \frac{x^{2q}}{r^{2q|1}} + \frac{x^{3q}}{r^{3q|1}} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Il est évident que l'on aura avec nos notations

$$\frac{1}{S_{q,r-1}(x)} = \frac{1^{r-1|1}}{x^{r-1}}\left[1 + \frac{M_{q,r}(1)x^q}{1^{q|1}} + \frac{M_{q,r}(2)x^{2q}}{1^{2q|1}} + \frac{M_{q,r}(3)x^{3q}}{1^{3q|1}} + \ldots\right].$$

On aura également

$$(24') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{S_{q,r}(x)}{S_{q,t}(x)} &= \left(\frac{x^r}{1^{r|1}} + \frac{x^{q+r}}{1^{q+r|1}} + \frac{x^{2q+r}}{1^{2q+r|1}} + \ldots\right) \\ &\quad \times \frac{1^{t|1}}{x^t}\left[1 + \frac{M_{q,t+1}(1)x^q}{1^{q|1}} + \frac{M_{q,t+1}(2)x^{2q}}{1^{2q|1}} + \ldots\right] \\ &= x^{r-t}\frac{1^{t|1}}{1^{r|1}} \sum_{p=0}^{p=\infty} x^{pq} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} \frac{M_{q,t+1}(\alpha)}{1^{\alpha q|1}(r+1)^{(p-\alpha)q|1}}. \end{aligned} \right.$$

Les formules précédentes renferment, comme cas très particuliers, les fonctions circulaires et hyperboliques lesquelles correspondent à $q = 2$.

III. — Les symboles aleph A^{λ}_{n+i}.

Considérons l'équation

$$\varphi(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0, \tag{25}$$

dont les racines sont

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Au moyen de la relation (25) on peut exprimer une puissance entière quelconque de x en fonction de n d'entre elles. Considérons en premier lieu les puissances entières positives et exprimons-les en fonction des puissances

$$x^{n-1} \qquad x^{n-2} \qquad\qquad x^2 \qquad x^1 \quad x^0$$

On aura le système

$$(25') \quad \begin{cases} x^0 = & & & & & 1 \\ x^1 = & & & & x & \\ x^2 = & & & x^2 & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{n-1} = & x^{n-1} & & & & \\ x^n = & A^1_n \, x^{n-1} + A^2_n \, x^{n-2} + \ldots + A^{n-2}_n x^2 + A^{n-1}_n x + A^n_n, \\ x^{n+1} = & A^1_{n+1} x^{n-1} + A^2_{n+1} x^{n-2} + \ldots + A^{n-2}_{n+1} x^2 + A^{n-1}_{n+1} x + A^n_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{n+i} = & A^1_{n+i} x^{n-1} + A^2_{n+i} x^{n-2} + \ldots + A^{n-2}_{n+i} x^2 + A^{n-1}_{n+i} x + A^n_{n+i}, \end{cases}$$

On a donc, par définition,

$$A^{\lambda}_{n-\lambda} = 1,$$
$$A^{\lambda}_{n-\lambda'} = 0 \quad \text{si} \quad \lambda' \neq \lambda.$$

Les quantités A^{λ}_{n+i} ont été étudiées par Wronski sous le nom de *fonctions aleph générales;* cette dénomination est impropre, car ce ne sont pas des fonctions dans le sens généralement attaché à ce mot : ce sont plutôt, comme les déterminants, des symboles

représentant une suite d'opérations à effectuer soit sur les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$, soit sur les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

De l'équation (25) on déduit, en multipliant par

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots$$

et en mettant dans le second membre les termes en $x^{n-\lambda}$,

$$\begin{aligned}
x^n &= -p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \ldots - p_{n-1} x^2 - p_{n-1} x - p_n,\\
x^{n+1} + p_1 x^n &= -p_2 x^{n-1} - p_3 x^{n-2} - \ldots - p_{n-1} x^2 - p_n \quad x,\\
x^{n+2} + p_1 x^{n+1} + p_2 x^n &= -p_3 x^{n-1} - p_4 x^{n-2} - \ldots - p_n \quad x^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

Remplaçons dans chaque égalité x^{n+i} par sa valeur tirée du système (25'), on obtient une équation du degré $(n-1)$ en x qui doit être identiquement nulle, puisque, étant une transformation de l'équation (25), elle doit posséder les n racines

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

avec leurs degrés de multiplicité respectifs.

En particulier, les coefficients de $x^{n-\lambda}$ sont tous nuls, ce qui donne le système

$$(26) \quad \begin{cases}
-p_\lambda = A^\lambda_n,\\
-p_{\lambda+1} = p_1 A^\lambda_n + A^\lambda_{n+1},\\
-p_{\lambda+2} = p_2 A^\lambda_n + p_1 A^\lambda_{n+1} + A^\lambda_{n+2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
-p_{\lambda+i} = p_i A^\lambda_n + p_{i-1} A^\lambda_{n+1} + p_{i-2} A^\lambda_{n+2} + \ldots + p_1 A^\lambda_{n+i-1} + A^\lambda_{n+i}.
\end{cases}$$

La dernière de ces égalités s'écrit

$$(27) \qquad A^\lambda_{n+i} + p_1 A^\lambda_{n+i-1} + \ldots + p_{i-1} A^\lambda_{n+1} + p_i A^\lambda_n + p_{i+\lambda} = 0.$$

Elle nous permet d'obtenir les symboles A^λ_{n+i} par voie de récurrence.

En particulier pour $\lambda = 1$, cette formule devient

$$(27') \qquad A^1_{n+i} + p_1 A^1_{n+i-1} + \ldots + p_{i-1} A^1_{n+i} + p_i A^1_n + p_{i+1} = 0,$$

et, pour $i \geqq n$, on a

$$(27'') \qquad A^{\lambda}_{n+i} + p_1 A^{\lambda}_{n+i-1} + \ldots + p_{n-1} A^{\lambda}_{i+1} + p_n A^{\lambda}_{i} = 0.$$

Considérons le système (26) et appliquons-lui la formule (19), il vient

$$(28) \qquad A^{\lambda}_{n+i} = \sum_{k=0}^{k=i} - p_{\lambda+i-k} \sum (-1)^{\nu} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k.$$

On se rend compte ainsi que, si l'on pose

$$N = -p_{\lambda} - p_{\lambda+1} x - p_{\lambda+2} x^2 - \ldots - p_n x^{n-\lambda},$$
$$D = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n,$$

on aura

$$\frac{N}{D} = A^{\lambda}_{n} + A^{\lambda}_{n+1} x + A^{\lambda}_{n+2} x^2 + \ldots.$$

Mais on a identiquement

$$x^{\lambda} N - (1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_{\lambda-1} x^{\lambda-1}) = -D,$$

d'où

$$\frac{N}{D} = \frac{1}{x^{\lambda}} \left(-1 + \frac{1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_{\lambda-1} x^{\lambda-1}}{D} \right).$$

On en déduit que A^{λ}_{n+i} est égal au coefficient de $x^{\lambda+i}$ dans le développement de la fraction

$$(29) \qquad \frac{1 + p_1 x + \ldots + p_{\lambda-1} x^{\lambda-1}}{1 + p_1 x + \ldots + p_n x^n} = \sum A^{\lambda}_{n+i} x^{\lambda+i}.$$

Cette formule constitue une méthode rapide pour l'obtention de A^{λ}_{n+i}.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on a

$$(29') \qquad \frac{1}{1 + p_1 x + \ldots + p_n x^n} = \sum A^{1}_{n+i} x^{i+1},$$

et la formule (20) donne

(30) $$A^1_{n+i} = \sum (-1)^\nu p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = i + 1.$$

La formule (28), en y remplaçant

$$\sum (-1)^\nu p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = k$$

par son expression (30)

$$A^1_{n+k-1},$$

devient

(31) $$A^\lambda_{n+i} = \sum_{k=0}^{k=i} -p_{\lambda+i-k} A^1_{n+k-1}$$

ou en développant

(31') $$A^\lambda_{n+i} + p_\lambda A^1_{n+i-1} + p_{\lambda+1} A^1_{n+i-2} + \dots + p_n A^1_{i+\lambda-1} = 0.$$

Cette formule nous permet d'obtenir les symboles A^λ_{n+i} en fonction des symboles A^1_{n+i}.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on retombe sur la formule

(27') $$A^1_{n+i} + p_1 A^1_{n+i-1} + \dots + p_n A^1_i = 0.$$

Considérons l'équation

$$x^{n+i} = A^1_{n+i} x^{n-1} + A^2_{n+i} x^{n-2} + \dots + A^{n-1}_{n+i} x + A^n_{n+i}.$$

Cette équation est satisfaite quand on y remplace successivement x par chacune des racines

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n,$$

que nous supposerons inégales.

On obtient ainsi un système de n équations linéaires qui nous

permet d'exprimer chacun des symboles A_{n+i}^{λ} en fonction des

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

En particulier, on a

$$(32) \qquad A_{n+i}^{1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1^{n+i} a_1^{n-2} & \ldots & a_1^2 a_1 & 1 \\ a_2^{n+i} a_2^{n-2} & \ldots & a_2^2 a_2 & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_n^{n+i} a_n^{n-2} & \ldots & a_n^2 a_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^{n-1} a_1^{n-2} & \ldots & a_1^2 a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} a_2^{n-2} & \ldots & a_2^2 a_2 & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_n^{n-1} a_n^{n-2} & \ldots & a_n^2 a_n & 1 \end{vmatrix}}.$$

D'après ce que nous avons vu précédemment

$$(32') \qquad A_{n+i}^{1} = \sum a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_n^{\gamma_n}$$

avec

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = i + 1.$$

Dès lors la formule (31) permet d'obtenir A_{n+i}^{λ} en fonction des racines

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

puisque l'on a

$$(-1)^i p_i = \sum a_1 a_2 \ldots, a_i.$$

Considérons l'expression (32); en développant le numérateur par rapport aux éléments de la première colonne et en effectuant les réductions, il vient

$$A_{n+i}^{1} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a_j^{n+i}}{(a_j - a_1)(a_j - a_2)\ldots(a_j - a_n)}.$$

Or de l'identité

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

on tire

$$\varphi'(x) = \sum (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

les facteurs du second membre étant en nombre $n-1$, d'où

$$\varphi'(a_j) = (a_j - a_1)(a_j - a_2)\ldots(a_j - a_n).$$

L'égalité ci-dessus devient

$$(33) \qquad A^1_{n+i} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{a_j^{n+i}}{\varphi'(a_j)};$$

c'est une formule bien connue dans la théorie des fractions rationnelles et qu'on énonce ainsi.

Soient

$$F(x) = M_1 x^{n-1} + M_2 x^{n-2} + \ldots$$

et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines inégales de $\varphi(x) = 0$, on a

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{F(a_j)}{\varphi'(a_j)} = M_1.$$

Dans le cas qui nous occupe

$$F(x) = x^{n+i} = A^1_{n+i} x^{n-1} + \ldots.$$

Considérons maintenant les puissances négatives de x et exprimons-les en fonction des puissances

$$x^{-(n-1)}, \quad x^{-(n-2)}, \quad \ldots, \quad x^{-2}, \quad x^{-1}, \quad x^0;$$

posons

$$x^{-(n+i)} = A^{-1}_{n+i} x^{-(n-1)} + A^{-2}_{n+i} x^{-(n-2)} + \ldots + A^{-(n-1)}_{n+i} x + A^{-n}_{n+i},$$

il est visible que nous passerons des symboles A^{λ}_{n+i} aux nouveaux $A^{-\lambda}_{n+i}$ par la considération de l'équation aux inverses; en d'autres termes, il suffira de changer, dans toutes les formules qui précèdent, soit p_λ en $\frac{p_{n-\lambda}}{p_n}$ avec $p_0 = 1$, soit a_λ en $\frac{1}{a_\lambda}$.

En particulier, nous aurons les formules suivantes, conséquences des formules (26),

$$(26') \qquad \begin{cases} -p_{n-\lambda} = p_n A^{-\lambda}_n, \\ -p_{n-\lambda-1} = p_{n-1} A^{-\lambda}_n + p_n A^{-\lambda}_{n+1}, \\ -p_{n-\lambda-2} = p_{n-2} A^{-\lambda}_n + p_{n-1} A^{-\lambda}_{n+1} + p_n A^{-\lambda}_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ -p_{n-\lambda-i} = p_{n-i} A^{-\lambda}_n + p_{n-i+1} A^{-\lambda}_{n+1} + \ldots + p_n A^{-\lambda}_{n+i}, \end{cases}$$

et, puisque

$$A_{n-1}^{-1} = 1,$$

on pourra écrire le système d'égalités

$$(26'')\quad \begin{cases} 0 = p_{n-1} A_{n-1}^{-1} + p_n A_n^{-1}, \\ 0 = p_{n-2} A_{n-1}^{-1} + p_{n-1} A_n^{-1} + p_n A_{n+1}^{-1}, \\ 0 = p_{n-3} A_{n-1}^{-1} + p_{n-2} A_n^{-1} + p_{n-1} A_{n+1}^{-1} + p_n A_{n+2}^{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = p_{n-i-1} A_{n-1}^{-1} + p_{n-i} A_n^{-1} + p_{n+1-i} A_{n+1}^{-1} + \ldots + p_n A_{n+i}^{-1}. \end{cases}$$

De même, on obtiendra les symboles A_{n+i}^{-1} au moyen de la formule

$$(29'')\quad \frac{1}{1 + \frac{p_{n-1}}{p_n} x + \frac{p_{n-2}}{p_n} x^2 + \ldots + \frac{p_1}{p_n} x^{n-1} + \frac{1}{p_n} x^n} = \sum A_{n+i}^{-1} x^{i+1}.$$

Les formules (26″) et (29″) seront utilisées dans le Chapitre VIII.

Problème I. — *Trouver l'expression de A_{n+i}^1 dans le cas où toutes les racines sont égales.*

L'équation

$$\varphi(x) = 0$$

est alors

$$(x-a)^n = x^n - \frac{n}{1} x^{n-1} a + \ldots + (-1)^i \frac{n^{i|-1}}{1^{i|1}} x^{n-i} a^i + \ldots + (-1)^n a^n.$$

L'équation

$$x^{n+i} - A_{n+i}^1 x^{n-1} - \ldots - A_{n+i}^n = 0,$$

qui est une transformation de la précédente, possède donc la racine a avec le degré de multiplicité n.

La dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ du premier membre s'annule donc pour $x = a$, et l'on a

$$(n+i)^{n-1|-1} a^{i+1} - A_{n+i}^1 (n-1)^{n-1|-1} = 0,$$

d'où

$$(22)\quad A_{n+i}^1 = \frac{(n+i)^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}} a^{i+1} = \frac{n^{i+1|1}}{1^{i+1|1}} a^{i+1},$$

relation identique à la formule (22), ce qu'on pouvait aisément prévoir.

PROBLÈME II. — *Trouver l'expression générale des symboles* F *satisfaisant à la relation récurrente*

$$F_{n+i} + p_1 F_{n+i-1} + \ldots + p_{n-1} F_{i+1} + p_n F_i = 0, \tag{34}$$

en fonction des symboles initiaux

$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_{n-1}.$$

Nous avons établi la formule (27″)

$$A^\lambda_{n+i} + p_1 A^\lambda_{n+i-1} + \ldots + p_{n-1} A^\lambda_{i+1} + p_n A^\lambda_i = 0,$$

avec les conditions initiales

$$A^\lambda_{n-\lambda} = 1, \qquad A^\lambda_{n-\lambda'} = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda' \neq \lambda.$$

Dès lors on voit que A^λ_{n+i} serait la solution cherchée si les symboles initiaux étaient

$$F_{n-\lambda} = 1, \qquad F_{n-\lambda'} = 0 \qquad (\lambda' \neq \lambda).$$

De cette remarque, il résulte immédiatement que la solution est

$$F_{n+i} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_{n-\lambda} A^\lambda_{n+i}. \tag{35}$$

En tenant compte de la formule (31), on peut aussi écrire

$$F_{n+i} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_{n-\lambda} \sum_{k=0}^{k=i} (-p_{\lambda+i-k}) A^1_{n+k-1}. \tag{35'}$$

On voit ainsi que F_{n+i} est une combinaison linéaire des symboles A^1_{n+i}.

Réciproquement, toute combinaison linéaire des symboles A^1_{n+i} satisfait à la relation

$$F_{n+i} + p_1 F_{n+i-1} + \ldots + p_n F_i = 0,$$

puisque chacun des symboles A^1_{n+i} satisfait également à cette relation.

Problème III. — *Trouver le reste de la division du polynôme*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n+i} x^{n+i} + \ldots$$

par le polynôme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n.$$

La dernière formule du système (25')

$$x^{n+i} = A^1_{n+i} x^{n-1} + \ldots + A^{n-1}_{n+i} x + A^n_{n+i},$$

étant satisfaite quand on y remplace successivement x par chacune des racines de l'équation (25), prouve évidemment que le second membre est le reste de la division de x^{n+i} par le polynôme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n;$$

il en résulte immédiatement que, pour le polynôme proposé, le reste sera

$$\sum_{i=0} a_i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A^\lambda_i x^{n-\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} x^{n-\lambda} \sum_{i=0} a_i A^\lambda_i.$$

Cette formule pourrait être utilisée dans la théorie des nombres complexes algébriques proposée par M. Weierstrass. (Thèse de M. Berloty.)

IV. — Généralisation du procédé de Bernoulli.

Bernoulli a indiqué un procédé pour obtenir la racine de module maximum d'une équation algébrique, lorsque cette racine est unique; lorsque plusieurs racines ont le même module maximum, ce procédé est en défaut; nous allons exposer une généralisation de ce procédé, qui permet d'obtenir l'équation à laquelle satisfont les racines de module maximum.

La considération de l'équation aux inverses permettrait d'obtenir les racines ayant le même module minimum.

Soit l'équation (25)

$$\varphi(x) = 0,$$

que nous supposons débarrassée de ses racines égales.

Le cas où l'équation renfermerait des racines égales se ramène au précédent, par l'application du principe de continuité.

Rangeons les racines par ordre de grandeur décroissante des modules

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n;$$

et soient σ racines

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma$$

ayant le même module maximum.

Nous avons trouvé [formule (32')]

$$A^1_{n+i} = \sum a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_n^{\gamma_n}$$

avec

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = i + 1,$$

que nous écrirons plus simplement

$$A^1_{n+i} = \sum_{i+1} (a_1 a_2 \ldots a_n)$$

Si nous groupons les termes de cette fonction symétrique d'après le nombre de racines

$$a_1 a_2 \ldots a_\sigma$$

qu'ils renferment, nous aurons

$$A^1_{n+i} = \sum_{i+1} (a_1 a_2 \ldots a_\sigma) + \sum_1 (a_{\sigma+j}) \sum_i (a_1 a_2 \ldots a_\sigma) + \ldots$$
$$+ \sum_i (a_{\sigma+1} a_{\sigma+2} \ldots a_n) \sum_1 (a_{\sigma-j}) + \sum_{i+1} (a_{\sigma+1} a_{\sigma+2} \ldots a_n).$$

Lorsque i augmente indéfiniment, le dernier terme du second membre tend à devenir négligeable par rapport à la somme de tous les autres.

En effet, posons

$$\theta(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_\sigma),$$
$$\psi(x) = (x - a_{\sigma+1})(x - a_{\sigma+2}) \ldots (x - a_n),$$

d'après la formule (33), on a

$$M = \sum_{i+1} (a_1 a_2 \ldots a_\sigma) = \sum_{j=1}^{j=\sigma} \frac{a_j^{n+i}}{\theta'(a_j)},$$

$$N = \sum_{i+1} (a_{\sigma+1} a_{\sigma+2} \ldots a_n) = \sum_{j=\sigma+1}^{j=n} \frac{a_j^{n+i}}{\psi'(a_j)},$$

et il est visible que lorsque i augmente indéfiniment le rapport $\frac{N}{M}$ diminue au delà de toute limite; on peut donc écrire

$$\lim A_{n+i}^1 = \sum_{i+1} (a_1 a_2 \ldots a_\sigma) + \sum_1 (a_{\sigma+j}) \sum_i (a_1 a_2 \ldots a_\sigma) + \ldots + \sum_i (a_{\sigma+1} \ldots a_n) \sum_1 (a_{\sigma-j}).$$

Considérons maintenant l'équation

(36) $$\theta(x) = x^\sigma + q_1 x^{\sigma-1} + \ldots + q_{\sigma-1} x + q_\sigma = 0,$$

à laquelle satisfont les σ racines de module maximum.

Les symboles aleph $A'^1_{\sigma+i}$ correspondant à cette équation seront liés par la relation récurrente

$$A'^1_{\sigma+i} + q_1 A'^1_{\sigma+i-1} + \ldots + q_\sigma A'^1_i = 0.$$

Or, puisque à la limite, ainsi que nous venons de le montrer, les symboles A^1_{n+i} sont des combinaisons linéaires de ces symboles $A'^1_{\sigma+i}$, savoir

$$\lim A^1_{n+i} = A'^1_{\sigma+i} + \sum_i (a_{\sigma+j}) A'^1_{\sigma+i-1} + \ldots + \sum_i (a_{\sigma+1} \ldots a_n) A'^1_\sigma,$$

il en résulte que cette même relation récurrente aura lieu à la limite entre les symboles A^1_{n+i}; on aura donc

(37) $$A^1_{n+i} + q_1 A^1_{n+i-1} + \ldots + q_\sigma A^1_{n+i-\sigma} = 0.$$

Réciproquement, si, à la limite, les symboles A^1_{n+i} satisfont à la relation récurrente (37), les racines de l'équation (36) sont aussi racines de l'équation proposée (25).

Auparavant, nous ferons une remarque préliminaire.

Soient les $n+1$ équations

$$\begin{aligned} x^{n+i} &= A^1_{n+i}\ x^{n-1}+\ldots+A^{n-1}_{n+i}\ x+A^n_{n+i},\\ x^{n+i+1} &= A^1_{n+i-1}\,x^{n-1}+\ldots+A^{n-1}_{n+i+1}\,x+A^n_{n+i+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x^{2n+i} &= A^1_{2n+i}\ x^{n-1}+\ldots+A^{n-1}_{2n+i}\ x+A^n_{2n+i}, \end{aligned}$$

qui sont toutes des transformations de l'équation proposée.

Je dis qu'elles n'ont pas d'autres racines communes que celles de l'équation proposée.

En effet, ces racines communes doivent être également racines de toute combinaison linéaire de ces équations.

Or, si nous multiplions celles-ci par les coefficients

$$p_n,\quad p_{n-1},\quad \ldots,\quad p_1,\quad 1,$$

il vient, en ajoutant et en tenant compte des propriétés des symboles A^λ_{n+i},

$$x^{n+i}(x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n)=0.$$

Mais la racine $x=0$ ne peut appartenir à ces $(n+1)$ équations, car tous les symboles A^n_{n+i} et, par suite, les symboles A^1_{n+i}, d'après

$$(31') \qquad A^n_{n+i}+p_nA^1_{n+i-1}=0,$$

seraient nuls.

Donc ces $(n+1)$ équations n'ont pas d'autres racines que celles de l'équation proposée.

Multiplions $\sigma+1$ de ces équations consécutives par les coefficients

$$q_\sigma,\quad q_{\sigma-1},\quad \ldots,\quad q_1,\quad 1,$$

et ajoutons les équations ainsi multipliées.

Remarquons que, si la relation récurrente a lieu à la limite,

elle aura également lieu pour tout symbole A^{λ}_{n+i}, qui est une combinaison linéaire des symboles A^{1}_{n+i}.

Il viendra donc

$$x^{n+i+j}(x^{\sigma}+q_1x^{\sigma-1}+\ldots+q_{\sigma-1}x+q_{\sigma})=\varepsilon_1x^{n-1}+\ldots+\varepsilon_{n-1}x+\varepsilon_n,$$

ε_1, ε_2, ..., ε_n étant des quantités qui diminuent indéfiniment quand i augmente au delà de toute limite.

On peut donc dire qu'à la limite les $(n+1)$ équations ci-dessus ont comme racines communes les racines de l'équation (36), lesquelles sont, par suite, toutes, racines de l'équation proposée.

On se rendra compte qu'une relation récurrente d'ordre $\sigma < n$ existe entre les symboles consécutifs A^{1}_{n+i} en écrivant σ relations de ce genre; on obtiendra ainsi un système de σ équations linéaires à σ inconnues et l'on pourra rechercher si le système des solutions tend vers une limite déterminée quand i augmente indéfiniment.

Considérons la formule (29')

$$\frac{1}{1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_nx^n}=\sum A^{1}_{n+i}x^{i+1}.$$

De ce que nous venons de dire, il résulte que, si l'équation aux inverses

$$1+p_1x+\ldots+p_nx^n=0$$

possède σ racines de module minimum, une relation récurrente d'ordre σ aura lieu à la limite entre les symboles A^{1}_{n+i}

$$A^{1}_{n+i}+q_1A^{1}_{n+i-1}+\ldots+q_{\sigma}A^{1}_{n+i-\sigma}=0$$

et ces σ racines seront données par l'équation

$$1+q_1x+\ldots+q_{\sigma}x^{\sigma}=0.$$

Les remarques précédentes vont nous servir à établir un théorème général sur la convergence des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.

Considérons la série entière

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots;$$

elle peut toujours être considérée comme le quotient développé de la fraction

$$\frac{1}{1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Soit l'équation

$$0 = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots.$$

Admettons que cette équation ait σ racines de module minimum ρ

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_\sigma,$$

et soit

$$1 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_\sigma x^\sigma = 0$$

l'équation qui a pour racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma$.

On en déduit les conclusions suivantes :

1° La série entière

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

sera convergente à l'intérieur du cercle décrit de l'origine comme centre avec le rayon ρ ;

2° Sur ce cercle de convergence, il y aura σ points critiques donnés par les valeurs des σ racines

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_\sigma;$$

3° A la limite, les coefficients $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$, qui sont les symboles aleph des coefficients $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ou des racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma$, satisferont à la relation récurrente d'ordre σ

$$a_n + q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2} + \ldots + q_\sigma a_{n-\sigma} = 0.$$

Donc, étant donnée une série entière, on cherchera à déterminer la relation récurrente *d'ordre minimum* à laquelle satisfont à la limite les coefficients $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \ldots$.

Si cette relation est telle que

$$a_n + q_1 a_{n-1} + \ldots + q_\sigma a_{n-\sigma} = 0,$$

on en déduira que le cercle de convergence a un rayon ρ et qu'il existe sur le pourtour de ce cercle σ points critiques donnés par l'équation

$$1 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_\sigma x^\sigma = 0.$$

Dans le cas particulier où il y a un seul point critique sur le cercle de convergence, ce qui correspond au cas où le procédé de Bernoulli est applicable, le rayon de ce cercle sera donné par les deux relations

$$\lim a_n + q_1 \lim a_{n-1} = 0,$$
$$1 + q_1 \rho = 0,$$

d'où

$$\rho = \lim \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

ce qui constitue la règle de convergence donnée dans les Traités d'Analyse.

Applications numériques. — Supposons que l'on ait à la limite

$$A^1_{n+i} + q_1 A^1_{n+i-1} = 0.$$

La racine de module maximum sera donnée par l'équation

$$x + q_1 = 0,$$

d'où

$$x' = \lim \left(\frac{A^1_{n+i}}{A^1_{n+i-1}} \right):$$

c'est là le procédé de Bernoulli.

Supposons que l'on ait à la limite

$$A^1_{n+i} + q_1 A^1_{n+i-1} + q_2 A^1_{n+i-2} = 0.$$

En adjoignant l'équation semblable

$$A^1_{n+i+1} + q_1 A^1_{n+i} + q_2 A^1_{n+i-1} = 0,$$

on pourra déterminer q_1 et q_2, et les deux racines de module

maximum seront données par l'équation

$$x^2 + q_1 x + q_2 = 0.$$

Soit l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

on a la formule de récurrence

$$A^1_{2+i} - A^1_{1+i} - A^1_i = 0,$$

d'où la suite

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,
144, 233, 377, 610, 987, 1597.

On a donc, approximativement,

$$x' = \frac{1597}{987} = 1,618034,$$

valeur exacte jusqu'à la sixième décimale.

Soit l'équation proposée par Lagrange (*Traité de la résolution des équations numériques*)

$$x^3 - 7x - 7 = 0.$$

On a la formule de récurrence

$$A^1_{3+i} - 7A^1_{1+i} - 7A^1_i = 0,$$

d'où la suite

0, 0, 7, 0, 7, −7, 49, −98, 392, −1029, 3430, −9947,
31213, −93639, 288120, −873964, 2672313, −8134588.

On a donc, approximativement,

$$x' = -\frac{8134588}{2672313} = -3,044,$$

valeur approchée à 0,005 près.

Considérons l'équation

$$x^3 + 10x + 1 = 0.$$

On a la formule de récurrence

$$A^1_{3+i} + 10A^1_{1+i} + A^1_i = 0,$$

d'où la suite

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad -10, \quad -1, \quad 100, \quad 20, \quad -999, \quad -300,$$
$$9970, \quad 3999, \quad -99400.$$

Il est visible que le rapport $\frac{A^1_{i+1}}{A^1_i}$ ne tend pas vers une limite déterminée.

Résolvons le système

$$-99400 + q_1 3999 + q_2 9970 = 0,$$
$$3999 + q_1 9970 - q_2 300 = 0,$$

nous trouvons

$$q_1 = -0{,}099, \qquad q_2 = 10{,}01.$$

Il en résulte que les deux racines de module maximum sont données approximativement par l'équation

$$x^2 - 0{,}099\,x + 10{,}01.$$

Nous avons rappelé la formule (23)

$$\frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \sum \frac{B_p}{1^{p|1}} x^p,$$

B_p étant les nombres de Bernoulli.

Or les racines de module minimum de l'équation

$$\frac{e^x - 1}{x} = 0$$

sont

$$\pm 2\pi i,$$

c'est-à-dire qu'elles satisfont à l'équation

$$x^2 + 4\pi^2 = 0.$$

Il en résulte que l'on aura à la limite

$$\frac{B_{2p}}{1^{2p|1}} + 4\pi^2 \frac{B_{2p+2}}{1^{2p+2|1}} = 0,$$

d'où

$$2\pi = \sqrt{-\frac{(2p+1)(2p+2)B_{2p}}{B_{2p+2}}}.$$

Or on a

$$B_{14} = +\frac{7}{6},$$

$$B_{16} = -\frac{3617}{710},$$

d'où

$$2\pi = \sqrt{\frac{15 \times 16 \times 7 \times 710}{6 \times 3617}} = 6,282,$$

valeur approchée à 0,001.

V. — Relations entre certaines fonctions symétriques simples.

Nous allons appliquer les formules qui précèdent à la détermination des relations qui existent entre :

1° Les coefficients de l'équation (p_λ);

2° Les symboles aleph (A^1_{n+i});

3° Les sommes des puissances semblables (s_i).

De la relation (29′)

$$\frac{1}{1+p_1x+\ldots+p_nx^n} = \sum A^1_{n+i}x^{i+1}$$

on déduit, ainsi que nous l'avons montré, les égalités réciproques

$$(38)\quad \begin{cases} A^1_{n+i} = \sum(-1)^\nu p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\ldots p_{\lambda_\nu}, \\ p_{i+1} = \sum(-1)^\nu A^1_{n+\lambda_1-1}A^1_{n+\lambda_2-1}\ldots A^1_{n+\lambda_\nu-1} \end{cases}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu = i+1).$$

Les sommes des puissances semblables sont données par les

formules de Newton (SERRET, t. I, p. 378)

$$\begin{aligned}
1 &= s_0,\\
0 &= p_1 s_0 + s_1,\\
0 &= 2p_2 s_0 + p_1 s_1 + s_2,\\
0 &= 3p_3 s_0 + p_2 s_2 + p_1 s_2 + s_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
0 &= ip_i s_0 + p_{i-1} s_1 + p_{i-2} s_2 + \dots + p_1 s_{i-1} + s_i.
\end{aligned}$$

Ce système est identique au système (2) si l'on pose

$$\begin{aligned}
\theta^0_{p+i} &= 1, & \theta^0_{p+k} &= 0 & (k \neq i),\\
\theta^{p+i}_{p+i-\lambda} &= \lambda p_\lambda, & \theta^{p+\lambda+\mu}_{p+\lambda} &= p_\mu & (\lambda + \mu \neq i).
\end{aligned}$$

On aura donc, en appliquant la formule (6),

$$s_i = \sum (-1)^\nu \lambda_\nu p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_\nu} \tag{39}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = i.$$

En donnant à λ_ν une valeur déterminée k

$$k = (1, 2, \dots, i),$$

la formule précédente devient

$$s_i = \sum_{k=1}^{k=i} - kp_k \sum (-1)^\nu p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_{\nu-1}} = \sum_{k=1}^{k=i} - kp_k \mathrm{A}^1_{n+i-k-1}$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\nu-1} = i - k)$$

ou, en développant,

$$s_i + p_1 \mathrm{A}^1_{n+i-2} + 2p_2 \mathrm{A}^1_{n+i-3} + \dots + ip_i \mathrm{A}^1_{n-1} = 0. \tag{40}$$

Revenons à la formule (39) et supposons que, parmi les indices λ, il s'en trouve

μ_1 égaux à 1, μ_2 à 2, ..., μ_i à i.

On aura les conditions

$$\begin{aligned}
\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i &= \nu,\\
\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + i\mu_i &= i,
\end{aligned}$$

et le coefficient du terme

$$(-1)^{\nu} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_i^{\mu_i}$$

sera, puisque le dernier indice λ_ν est affecté d'un coefficient égal à sa valeur

$$\sum_{j=1}^{j=i} j \frac{1^{\nu-1|1}}{1^{\mu_1|1}\, 1^{\mu_2|1} \dots 1^{\mu_j-1|1} \dots 1^{\mu_i|1}}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=i} j \mu_j \frac{1^{\nu-1|1}}{1^{\mu_1|1} \dots 1^{\mu_j|1} \dots 1^{\mu_i|1}} = i \frac{1^{\nu-1|1}}{1^{\mu_1|1} \dots 1^{\mu_i|1}}.$$

On a donc l'expression connue

$$(41) \qquad s_i = \sum (-1)^{\nu} \frac{i\, 1^{\nu-1|1}}{1^{\mu_1|1}\, 1^{\mu_2|1} \dots 1^{\mu_i|1}} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_i^{\mu_i},$$

donnée sans démonstration par Waring dans ses *Meditationes algebraicæ*.

La démonstration qu'on en donne généralement est basée sur la formule du développement de Lagrange (Serret, p. 445-451).

Le système d'équations considéré précédemment peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
1 &= p_0, \\
0 &= \frac{s_1}{1} p_0 + p_1, \\
0 &= \frac{s_2}{2} p_0 + \frac{s_1}{2} p_1 + p_2, \\
0 &= \frac{s_3}{3} p_0 + \frac{s_2}{3} p_1 + \frac{s_1}{3} p_2 + p_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
0 &= \frac{s_i}{i} p_0 + \frac{s_{i-1}}{i} p_1 + \frac{s_{i-2}}{i} p_2 + \dots + \frac{s_1}{i} p_{i-1} + p_i,
\end{aligned}$$

système identique au système (2) si l'on pose

$$\theta_{p+i}^0 = 1, \qquad \theta_{p+k}^0 = 0 \qquad (k \neq i),$$

$$\theta_{p+\lambda}^{p+\lambda+\mu} = \frac{s_\mu}{i-\lambda}.$$

Il viendra donc, en appliquant la formule (6),

$$p_i = \sum (-1)^\nu \frac{s_{\lambda_1} s_{\lambda_2} \ldots s_{\lambda_\nu}}{i(i-\lambda_1)\ldots(i-\lambda_1-\lambda_2\ldots\lambda_{\nu-1})} \tag{42}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = i.$$

En général, on obtient cette formule en la considérant comme un cas particulier de celle de Waring (Serret, p. 451-461), et l'on trouve

$$p_i = \sum (-1)^\nu \frac{s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_i^{\mu_i}}{1^{\mu_1} 1 \, 2^{\mu_2} 2 \ldots i^{\mu_i} i} \tag{42'}$$

avec les conditions

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i = \nu,$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + i\mu_i = i.$$

Le rapprochement des deux formules (42), (42') donne la relation

$$\sum \frac{1}{i(i-\lambda_1)(i-\lambda_1-\lambda_2)\ldots(i-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{\nu-1})} = \frac{1}{1^{\mu_1} 1 \, 2^{\mu_2} 2 \ldots i^{\mu_i} i}.$$

Enfin la relation (40), dans laquelle on fait successivement

$$i = (1, 2, 3, \ldots, i)$$

donne naissance au système suivant

$$-\frac{s_1}{p_1} = A_{n-1}^1,$$
$$-\frac{s_2}{p_1} = \frac{2p_2}{p_1} A_{n-1}^1 + A_n^1,$$
$$-\frac{s_3}{p_1} = \frac{3p_3}{p_1} A_{n-1}^1 + \frac{2p_2}{p_1} A_n^1 + A_{n+1}^1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$-\frac{s_i}{p_1} = \frac{ip_i}{p_1} A_{n-1}^1 + \frac{(i-1)p_{i-1}}{p_1} A_n^1 + \ldots + \frac{2p_2}{p_1} A_{n+i-3}^1 + A_{n+i-2}^1.$$

Ce système est identique au système (19_a; si l'on pose;

$$a_{p-k} = -\frac{s_{i-k}}{p_1}, \qquad b_\lambda = \frac{\lambda p_\lambda}{p_1},$$

on aura donc

$$(43)\qquad A^1_{n+i-2} = \sum_{k=0}^{k=i-1} -\frac{s_{i-k}}{p_1} \sum (-1)^\nu \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu \frac{p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_\nu}}{p_1^\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k.$$

VI. — Les séries.

Soit une fonction synectique Ω_0 exprimable linéairement et identiquement au moyen d'autres fonctions synectiques

$$\Omega_1,\quad \Omega_2,\quad \ldots,\quad \Omega_n,$$

en nombre fini. On a, A_1, A_2, ..., A_n étant des coefficients constants,

$$(44)\qquad \Omega_0 = A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + \ldots + A_n \Omega_n.$$

En prenant les différences successives de cette identité nous aurons le système d'équations

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + \ldots + A_n \Omega_n,\\
\Delta\Omega_0 &= A_1 \Delta\Omega_1 + A_2 \Delta\Omega_2 + \ldots + A_n \Delta\Omega_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Delta^{n-1}\Omega_0 &= A_1 \Delta^{n-1}\Omega_1 + A_2 \Delta^{n-1}\Omega_2 + \ldots + A_n \Delta^{n-1}\Omega_n,
\end{aligned}$$

et en appliquant la formule (6) à ce système on trouve

$$(45)\qquad A_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} \theta^0_{p+k} \sum (-1)^\nu \theta_p^{p+\lambda_1} \theta_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \ldots \theta_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k},$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k,$$

$$\theta^i_p = \frac{D(\Omega_1\, \Delta\Omega_2\, \Delta^2\Omega_3 \ldots \Delta^{n-2}\Omega_{n-1}\, \Delta^{n-1}\Omega_i)}{D(\Omega_1\, \Delta\Omega_2\, \Delta^2\Omega_3 \ldots \Delta^{n-2}\Omega_{n-1}\, \Delta^{n-1}\Omega_n)}.$$

Rappelons la formule (18)

$$\theta^i_p = \frac{\Delta\theta^i_{p-1}}{\Delta\theta^p_{p-1}},$$

que nous avons trouvée précédemment et qui permet de calculer

θ_p^i par voie de récurrence, puisque

$$\theta_1^i = \frac{\Omega_i}{\Omega_1}.$$

La formule (45) se simplifie considérablement quand on suppose que les fonctions Ω_p sont les puissances entières positives d'une fonction y et lorsque la différence Δ devient une différentielle que nous caractériserons par la lettre d.

Posons donc

$$\Omega_0 = A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + \ldots + A_n y^{n-1}.$$

Calcul de θ_p^i. — La formule (18) devient

$$\theta_p^i = \frac{d\theta_{p-1}^i}{d\theta_{p-1}^p}.$$

On aura dès lors

$$\theta_1^i = y^{i-1}, \qquad \text{d'où} \quad \theta_1^2 = y,$$

$$\theta_2^i = \frac{d\theta_1^i}{d\theta_1^2} = \frac{dy^{i-1}}{dy} = \frac{(i-1)}{1} y^{i-2}, \qquad \theta_2^3 = 2y,$$

$$\theta_3^i = \frac{d\theta_2^i}{d\theta_2^3} = \frac{d\frac{(i-1)}{1}y^{i-2}}{d2y} = \frac{(i-1)(i-2)}{1.2} y^{i-3}, \qquad \theta_3^4 = 3y,$$

....

et, la loi étant soupçonnée,

$$\theta_p^i = \frac{d\theta_{p-1}^i}{d\theta_{p-1}^p} = \frac{d\frac{(i-1)^{p-2|-1}}{1^{p-2|1}} y^{i-p+1}}{d(p-1)y} = \frac{(i-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} y^{i-p} = \frac{p^{i-p|1}}{1^{i-p|1}} y^{i-p},$$

$$\theta_p^{p+1} = py.$$

La loi est donc générale; on a

$$(46) \qquad \begin{cases} \theta_p^i = \dfrac{(i-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} y^{i-p} = \dfrac{p^{i-p|1}}{1^{i-p|1}} y^{i-p}, \\ \theta_p^{p+1} = py. \end{cases}$$

La formule (18) devient également

$$\theta_p^i = \frac{d}{d\theta_{p-1}^p}\left(\frac{d}{d\theta_{p-2}^{p-1}}\left\{\cdots\left[\frac{d}{d\theta_2^3}\left(\frac{d\theta_1^i}{d\theta_1^2}\right)\right]\cdots\right\}\right),$$

et, comme

$$\theta_p^{p+1} = py, \qquad d\theta_p^{p+1} = p\,dy,$$

on a donc

(47) $$\theta_p^i = \frac{1}{1^{p-1|1}} \frac{d^{p-1}(\theta_1^i)}{\overline{dy}^{p-1}},$$

y étant pris dans cette formule comme la variable indépendante.

Calcul de D_p^p. — En supposant que d est une différentiation, la formule (17) devient

$$\frac{D_p^p}{D_{p-1}^{p-1}} = \frac{D_{p-1}^{p-1}}{D_{p-2}^{p-2}} d\theta_{p-1}^p = \frac{D_{p-1}^{p-1}}{D_{p-2}^{p-2}} (p-1)\,dy,$$

d'où l'on a également

$$\frac{D_{p-1}^{p-1}}{D_{p-2}^{p-2}} = \frac{D_{p-2}^{p-2}}{D_{p-3}^{p-3}} (p-2)\,dy,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{D_3^3}{D_2^2} = \frac{D_2^2}{D_1^1} 2\,dy,$$
$$\frac{D_2^2}{D_1^1} = d\theta_1^2 = dy,$$

d'où, en multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{D_p^p}{D_{p-1}^{p-1}} = 1^{p-1|1}\,\overline{dy}^{p-1};$$

on aura donc la suite d'égalités

$$\frac{D_p^p}{D_{p-1}^{p-1}} = 1^{p-1|1}\,\overline{dy}^{p-1},$$
$$\frac{D_{p-1}^{p-1}}{D_{p-2}^{p-2}} = 1^{p-2|1}\,\overline{dy}^{p-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{D_3^3}{D_2^2} = 1^{2|1}\,\overline{dy}^{2},$$
$$\frac{D_2^2}{D_1^1} = dy,$$

et, en multipliant membre à membre,

$$(48)\quad D_p^p = 1^{1|1}\, 2^{2|1}\, 3^{3|1} \ldots p^{p-1|1}\, \overline{dy}^{\,1+2+\ldots+(p-1)} = 1^{1|1}\, 2^{2|1} \ldots p^{p-1|1}\, \overline{dy}^{\,\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Voyons maintenant ce que devient la formule (45) en tenant compte des relations précédentes.

On a

$$A_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} \theta_{p+k}^0 \sum (-1)^\nu \theta_p^{p+\lambda_1} \ldots \theta_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k} \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k).$$

Posons, ainsi que nous l'avons déjà fait (7),

$$T_p^{p+k} = \sum (-1)^\nu \theta_p^{p+\lambda_1} \theta_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \ldots \theta_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k},$$

on aura, en tenant compte de (46),

$$\begin{aligned} T_p^{p+k} &= \sum (-1)^\nu y^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu} \frac{p^{\lambda_1|1}(p+\lambda_1)^{\lambda_2|1} \ldots (p+\lambda_1+\ldots+\lambda_{\nu-1})^{\lambda_\nu|1}}{1^{\lambda_1|1}\, 1^{\lambda_2|1} \ldots 1^{\lambda_\nu|1}} \\ &= y^k p^{k|1} \sum (-1)^\nu \frac{1}{1^{\lambda_1|1}\, 1^{\lambda_2|1} \ldots 1^{\lambda_\nu|1}} \end{aligned}$$

et, d'après la formule (21),

$$T_p^{p+k} = (-1)^k \frac{p^{k|1}}{1^{k|1}} y^k.$$

Nous avons donc, en résumé, les formules

$$(49)\quad \begin{cases} \theta_p^0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-p} A_{p+k}\, \theta_p^{p+k}, \\ A_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-p} \theta_{p+k}^0\, T_p^{p+k}, \end{cases}$$

θ_p^{p+k}, T_p^{p+k} étant des symboles réciproques donnés par les relations suivantes (46) et (47) :

$$(50)\quad \begin{cases} \theta_p^{p+k} = \dfrac{p^{k|1}}{1^{k|1}} y^k = \dfrac{1}{1^{p-1|1}} \dfrac{d^{p-1}(y^{p+k-1})}{\overline{dy}^{\,p-1}}, \\ T_p^{p+k} = (-1)^k \dfrac{p^{k|1}}{1^{k|1}} y^k = (-1)^k \dfrac{1}{1^{p-1|1}} \dfrac{d^{p-1}(y^{p+k-1})}{\overline{dy}^{\,p-1}}. \end{cases}$$

Remarquons que, pour $y=0$, θ_p^{p+k}, T_p^{p+k} se réduisent à zéro pour $k \neq 0$ et, par suite, les formules (49) donnent

$$[\theta_p^0]_{y=0} = A_p. \tag{51}$$

Applications. — Formule du changement de variables.

Nous avons trouvé (47)

$$\theta_p^0 = \frac{1}{1^{p-1|1}} \frac{d^{p-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p-1}}.$$

Mais on a

$$\left\{\begin{aligned} \theta_p^0 &= \frac{D_p^0}{D_p^p} = \frac{D[1.dy.d^2y^2.d^3y^3\ldots d^{p-2}y^{p-2}\,d^{p-1}\Omega_0(x)}{1^{1|1}\,1^{2|1}\ldots 1^{p-1|1}\,\overline{dy}^{\frac{p(p-1)}{2}}} \\ &= \frac{1}{1^{p-1|1}} \frac{d^{p-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p-1}}. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

C'est la formule donnée par Wronski pour calculer les dérivées de $\Omega_0(x)$ par rapport à y quand on connaît les dérivées de $\Omega_0(x)$ et de y par rapport à x.

En particulier,

$$\text{Pour } p = 2\ldots\ldots \quad \frac{d\Omega_0(x)}{dy} = \frac{\dfrac{d\Omega_0(x)}{dx}}{\dfrac{dy}{dx}},$$

$$\text{Pour } p = 3\ldots\ldots \quad \frac{d^2\Omega_0(x)}{\overline{dy}^2} = \frac{\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2\Omega_0(x)}{dx^2} - \dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{d\Omega_0(x)}{dx}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}$$

formule connue.

Séries infinies. — Supposons que, *dans un certain intervalle* $\lambda < x < \mu$:

1° y soit une fonction synectique de x;

2° $\Omega_0(x)$ soit donnée par la série absolument et uniformément convergente

$$\Omega_0(x) = A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + \ldots, \tag{53}$$

ce qui implique que $\Omega_0(x)$ est une fonction synectique de y;

3° Toutes les séries obtenues en dérivant successivement par

rapport à x le second membre de (53) soient également, absolument et uniformément convergentes; ce qui implique que $\Omega_0(x)$ est une fonction synectique de x.

Dans ces hypothèses, il est facile de montrer que les formules précédentes restent applicables lorsqu'on y suppose que n augmente indéfiniment.

En effet, on pourra écrire l'une quelconque des équations du système (53)

$$\frac{d^p\Omega_0(x)}{\overline{dx}^p} = A_2\frac{d^p y}{\overline{dx}^p} + A_3\frac{d^p y^2}{\overline{dx}^p} + \ldots + A_n\frac{d^p y^{n-1}}{\overline{dx}^p} + \varepsilon_p,$$

ε_p étant une quantité qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

On a donc

$$\frac{d^p\Omega_0(x)}{\overline{dx}^p} - \varepsilon_p = A_2\frac{d^p y}{\overline{dx}^p} + \ldots + A_n\frac{d^p y^{n-1}}{\overline{dx}^p},$$

et la seconde formule (49) donne

$$A_p = \sum_{k=0}^{k=n-p} T_p^{p+k}\theta^0_{p+k} = \sum_{k=0}^{k=n-p}(-1)^k\frac{p^{k|1}}{1^{k|1}}y^k\frac{1}{1^{p+k-1|1}}\left[\frac{d^{p+k-1}\Omega_0(x)}{\overline{dx}^{p+k-1}} - \varepsilon_{p+k-1}\right].$$

Sous cette forme on reconnaît que, lorsque n augmente indéfiniment, A_p a pour limite l'expression

$$\begin{aligned}\lim A_p &= \sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{p^{k|1}}{1^{k|1}\,1^{p+k-1|1}}y^k\frac{d^{p+k-1}\Omega_0(x)}{\overline{dx}^{p+k-1}}\\ &= \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{1^{p-1|1}}\frac{y^k}{1^{k|1}}\frac{d^{p+k-1}\Omega_0(x)}{\overline{dx}^{p+k-1}},\end{aligned}$$

puisque la série $\sum\frac{1}{1^{p-1|1}\,1^{k|1}}y^k = \frac{e^y}{1^{p-1|1}}$ est convergente pour toutes les valeurs de y et donnera, au maximum, comme terme complémentaire

$$\varepsilon_{p+k-1}\frac{e^y}{1^{p-1|1}}.$$

Développements en séries. — Les formules (61), (52) nous

donnent

$$A_p = |\theta_p^0|_{y=0} = \frac{1}{1^{p-1|1}} \left[\frac{d^{p-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p-1}} \right]_{y=0}$$

$$= \left\{ \frac{D[1.dy.d^2y^2 \ldots d^{p-2}y^{p-2} d^{p-1}\Omega_0(x)]}{1^{1|1} 1^{2|1} \ldots 1^{p-1|1} \overline{dy}^{\frac{p(p-1)}{2}}} \right\}_{y=0}.$$

Soit a la valeur de la variable indépendante x telle que, pour $x = a, y = 0$; alors on aura également

$$(54) \qquad A_p = |\theta_p^0|_{x=a} = \ldots.$$

On obtient ainsi la formule du développement de Paoli

$$\Omega_0(x) = \Omega_0(a) + y \left[\frac{d\Omega_0(x)}{dy} \right]_{x=a} + \frac{y^2}{1.2} \left[\frac{d^2\Omega_0(x)}{\overline{dy}^2} \right]_{x=a} + \ldots$$

$$= \Omega_0(a) + y \left[\frac{\frac{d\Omega_0(x)}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \right]_{x=a} + \frac{y^2}{1.2} \left[\frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^2\Omega_0(x)}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\Omega_0(x)}{dx}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \right]_{x=a} + \ldots.$$

En particulier, si $y = x - a$, on a la formule du développement de Taylor

$$\Omega_0(x) = \Omega_0(a) + y\,\Omega'(a) + \frac{y^2}{1.2}\,\Omega''(a) + \ldots$$

$$= \Omega_0(a) + \frac{x-a}{1}\,\Omega'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\,\Omega''(a) + \ldots.$$

Pour $a = 0$, on a le développement de Maclaurin.

Réciproquement, les coefficients A_p définis par la formule

$$A_p = \frac{1}{1^{p-1|1}} \left[\frac{d^{p-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p-1}} \right]_{x=a}$$

et, par conséquent, fonctions de a, peuvent être définis par les formules (49) et (50) dans lesquelles la variable indépendante x a une valeur arbitraire, mais comprise dans l'intervalle pour lequel les formules précédentes ont été reconnues valables.

On a donc

$$A_p = \frac{1}{1^{p-1|1}} \left[\frac{d^{p-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p-1}} \right]_{x=a} = \sum \theta^0_{p+k} T^p_{p+k}$$
$$= \sum (-1)^k \frac{p^{k|1}}{1^{k|1}} y^k \frac{1}{1^{p+k-1|1}} \frac{d^{p+k-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p+k-1}},$$

d'où il vient après réductions

$$(54') \qquad \left[\frac{d^{p-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p-1}} \right]_{x=a} = \sum (-1)^k \frac{y^k}{1^{k|1}} \frac{d^{p+k-1}\Omega_0(x)}{\overline{dy}^{p+k-1}}.$$

C'est la formule donnée pour la première fois par Wronski.

En particulier, pour $p = 1$,

$$(54'') \qquad \begin{cases} A_1 = \Omega_0(a) = \sum (-1)^k \dfrac{y^k}{1^{k|1}} \dfrac{d^k\Omega_0(x)}{\overline{dy}^k} \\ \qquad = \Omega_0(x) - \dfrac{y}{1} \dfrac{d\Omega_0(x)}{dy} + \dfrac{y^2}{1.2} \dfrac{d^2\Omega_0(x)}{\overline{dy}^2} \cdots \end{cases}$$

C'est la formule donnée par Euler pour trouver le développement d'une fonction quelconque Ω_0 de la racine a de l'équation

$$y = 0.$$

En particulier, si

$$y = x,$$

alors pour

$$y = 0, \qquad x = a = 0,$$

et l'on a

$$(54''') \qquad \begin{cases} \Omega_0(0) = \sum (-1)^k \dfrac{x^k}{1^{k|1}} \dfrac{d^k\Omega_0(x)}{dx^k} \\ \qquad = \Omega_0(x) - \dfrac{x}{1} \Omega'(x) + \dfrac{x^2}{1.2} \Omega''(x) + \cdots \end{cases}$$

C'est le développement en série de Bernoulli.

Dans le développement de Paoli, nous avons admis que, pour

$$y = 0 \qquad x = a;$$

nous pouvons donc poser

$$y = (x - a) \quad \theta(x),$$

$\theta(x)$ étant une fonction de x que nous supposons, pour $x = a$, ne devenir ni nulle ni infinie.

On aura donc

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = [\theta(x)]_{x=a},$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a} = 2\left[\frac{d\theta(x)}{dx}\right]_{x=a},$$
$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=a} = 3\left[\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}\right]_{x=a},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

D'où il vient

$$\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dy}\right]_{x=a} = \left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right]_{x=a} = \left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\frac{1}{\theta(x)}\right]_{x=a},$$

$$\left[\frac{d^2\Omega_0(x)}{dy^2}\right]_{x=a} = \left(\frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^2\Omega_0}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\,\Omega_0}{dx}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\right)_{x=a}$$
$$= \left[\frac{\theta(x)\frac{d^2\Omega_0}{dx^2} - 2\frac{d\theta(x)}{dx}\frac{d\,\Omega_0}{dx}}{[\theta(x)]^3}\right]_{x=a} = \left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\frac{1}{[\theta(x)]^2}\right]\right\}_{x=a}.$$

On trouve de même généralement

$$\left[\frac{d^p\Omega_0(x)}{dy^p}\right]_{x=a} = \left\{\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\frac{1}{[\theta(x)]^p}\right]\right\}_{x=a};$$

C'est la relation donnée par Burmann et, par suite, le développement de Paoli devient

$$\Omega_0(x) = \Omega_0(a) + \frac{y}{1}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\frac{1}{\theta(x)}\right]_{x=a}$$
$$+ \frac{y^2}{1.2}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\frac{1}{[\theta(x)]^2}\right]\right\}_{x=a}$$
$$+ \frac{y^3}{1.2.3}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\frac{1}{[\theta(x)]^3}\right]\right\}_{x=a} + \dots.$$

En particulier, si l'on pose

$$\theta(x) = \frac{1}{f(x)},$$

x sera déterminé par la relation

$$y = \frac{x-a}{f(x)}$$

ou

$$x = a + yf(x) = 0$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}\Omega_0(x) = \Omega_0(a) &+ \frac{y}{1}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx} f(x)\right]_{x=a} \\ &+ \frac{y^2}{1.2}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\overline{f(x)}^2\right]\right\}_{x=a} \\ &+ \frac{y^3}{1.2.3}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d\,\Omega_0(x)}{dx}\overline{f(x)}^3\right]\right\}_{x=a} + \ldots\end{aligned}$$

C'est la formule du développement de Lagrange.

Application numérique. — Soit à résoudre l'équation

$$y = \varphi(x) = 0.$$

Le développement d'Euler, dans lequel on fait $\Omega_0(x) = x$, nous donnera

$$a = \sum (-1)^k \frac{\overline{\varphi(x)}^k}{1^{k|1}} \frac{d^k x}{\overline{d\varphi(x)}^k}$$

et, en utilisant la formule (52),

$$(55)\quad a = x - \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}}\varphi(x) - \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{2\,\frac{d\varphi}{dx}}\overline{\varphi(x)}^2 - \frac{\frac{d^2\varphi}{d^2x}\frac{d^3\varphi^2}{dx^3} - \frac{d^3\varphi}{dx^3}\frac{d^2\varphi^2}{dx^2}}{12\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^6}\overline{\varphi(x)}^3 - \ldots$$

Appliquons ce développement à la recherche de la racine de l'équation

$$\varphi(x) = x^3 - 7x - 7 = 0$$

dont nous avons trouvé une solution approchée

$$x' = -3{,}044.$$

On a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 3x^2 - 7, \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 6x,$$

d'où

$$\varphi(x') = 0{,}103, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x'} = 20{,}797, \qquad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x'} = -18{,}264$$

et, en nous bornant aux trois premiers termes du développe-

ment,

$$a = -3{,}044 - \frac{0{,}103}{20{,}797} + \frac{\overline{0{,}103}^2}{2.}\,\frac{18{,}264}{\overline{20{,}797}^2} = -3{,}04894,$$

valeur exacte jusqu'à la quatrième décimale.

Il est possible de généraliser les principaux résultats obtenus dans ce Chapitre.

Considérons, en effet, l'opération Δ ainsi définie

$$\Delta y = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx},$$

a_i étant, dans de certaines limites, une fonction synectique de x.

Calculons la suite des fonctions $y_1, y_2, y_3, \ldots$, dont nous supposerons les conditions initiales bien déterminées, définies par les relations

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= 1, \\ \Delta y_2 &= y_1, \\ \Delta y_3 &= y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et admettons qu'une fonction Ω_0 puisse être représentée, sous certaines conditions de limite et de convergence, par la série linéaire

$$\Omega_0 = A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + \ldots.$$

Il est évident qu'en effectuant successivement l'opération Δ on aura le système

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + \ldots, \\ \Delta\Omega_0 &= A_1 + y_1 A_2 + y_2 A_3 + \ldots, \\ \Delta^2\Omega_0 &= A_2 + y_1 A_3 + \ldots, \\ \Delta^3\Omega_0 &= A_3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On aura donc, en appelant $z_1, z_2, z_3, \ldots$ les symboles réciproques de $y_1, y_2, y_3, \ldots$,

$$\begin{aligned} \Delta^p \Omega_0 &= \sum_0 y_k A_{p+k}, \\ A_p &= \sum_0 z_k \Delta^{p+k} \Omega_0, \end{aligned}$$

formules analogues aux formules (49).

En particulier, si

$$\Delta = \frac{d}{dx},$$

on trouve

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{x^2}{1.2}, \quad y_3 = \frac{x^3}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad y_i = \frac{x^i}{1^{i|1}} \quad \text{et} \quad z_i = (-1)^i \frac{x^i}{1^{i|1}},$$

et l'on retombe sur les formules établies.

VII. — Les fractions continues.

On sait que les réduites successives d'une fraction continue

$$a_0 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \ldots}}}$$

satisfont à la relation récurrente

$$\begin{aligned} P_n &= a_{n-1} P_{n-1} + x P_{n-2}, \\ Q_n &= a_{n-1} Q_{n-1} + x Q_{n-2}, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$P_0 = 1, \qquad Q_1 = 1.$$

Nous aurons donc le système suivant

$$\begin{aligned}
0 &= P_n - a_{n-1} P_{n-1} - x P_{n-2}, \\
0 &= P_{n-1} - a_{n-2} P_{n-2} - x P_{n-3}, \\
0 &= P_{n-2} - a_{n-3} P_{n-3} - x P_{n-4}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= P_2 - a_1 P_1 - x P_0, \\
0 &= P_1 - a_0 P_0, \\
1 &= P_0.
\end{aligned}$$

système identique au système (2), si l'on pose

$$\theta^0_{p+n} = 1, \qquad \theta^0_{p+k} = 0 \qquad (k \neq n),$$

$$\theta^{p+\lambda+1}_{p+\lambda} = -a_{n-\lambda-1}, \qquad \theta^{p+\lambda+2}_{p+\lambda} = -x, \qquad \theta^{p+\lambda+\mu}_{p+\lambda} = 0 \qquad [\mu \neq (1, 2)];$$

on aura donc

$$P_n = \sum (-1)^\nu \theta_p^{p+\lambda_1} \ldots \theta^{p+n}_{p+n-\lambda_\nu}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = n,$$

$$P_{n-i} = \sum (-1)^\nu \theta_{p+i}^{p+i+\lambda_1} \ldots \theta_{p+n-\lambda_\nu}^{p+n}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = n - i.$$

On se rend compte ainsi que les symboles θ_p^{p+n} et P_n sont réciproques.

On aurait trouvé des relations semblables pour les symboles Q_n.

Transformations des séries en fractions continues. — Soit le développement

$$\Omega_0 = M_0 + M_1\varphi + M_2\varphi^2 + \ldots,$$

que nous allons transformer en fraction continue

$$A_0 + \cfrac{\varphi}{A_1 + \cfrac{\varphi}{A_2 + \cfrac{\varphi}{A_3 + \ldots}}}$$

Si nous posons

$$k_i = A_i + \cfrac{\varphi}{A_{i+1} + \cfrac{\varphi}{A_{i+2} + \cfrac{\varphi}{A_{i+3} + \ldots}}} = A_i + \frac{\varphi}{k_{i+1}},$$

A_i sera égal à la valeur de k_i pour $\varphi = 0$.

Cette remarque sert de base aux calculs qui suivent :

$$k_0 = \sum_0 M_n\varphi^n = A_0 + \frac{\varphi}{k_1},$$

d'où

$$A_0 = M_0;$$

$$k_1 = \frac{\varphi}{\sum\limits_0 M_n\varphi^n - M_0} = \frac{1}{\sum\limits_1 M_n\varphi^{n-1}} = A_1 + \frac{\varphi}{k_2},$$

d'où

$$A_1 = \frac{1}{M};$$

$$k_2 = \frac{\varphi}{\dfrac{1}{\sum\limits_1 M_n \varphi^{n-1}} - \dfrac{1}{M_1}} = -\frac{\sum\limits_1 M_n \varphi^{n-1}}{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}} = A_2 + \frac{\varphi}{k_3},$$

d'où
$$A_2 = -\frac{M_1}{\dfrac{1}{M_1} M_2};$$

$$k_3 = \frac{\varphi}{-\dfrac{\sum\limits_1 M_n \varphi^{n-1}}{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}} + \dfrac{M_1}{\dfrac{1}{M_1} M_2}} = -\frac{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}}{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}} = A_3 + \frac{\varphi}{k_4},$$

d'où
$$A_3 = \frac{\dfrac{1}{M_1} M_2}{\dfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}};$$

$$k_4 = \frac{\varphi}{\dfrac{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}}{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}} - \dfrac{\dfrac{1}{M_1} M_2}{\dfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}}{\dfrac{\dfrac{1}{M_1}}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_{n-1} & M_2 \\ \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \varphi^{n-4}}$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}}{\dfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}} = A_4 + \frac{\varphi}{k_5},$$

d'où
$$A_4 = -\frac{\dfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}};$$

$$k_5 = \cfrac{\varphi}{-\cfrac{\cfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}} + \cfrac{\cfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}}$$

$$= \cfrac{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}}{\cfrac{\cfrac{1}{M_2}}{\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}\sum\limits_5 \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-2} \\ M_2 & M_{n-1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \end{vmatrix} \varphi^{n-5}}$$

$$= \cfrac{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}\sum\limits_5 \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_{n-2} \\ M_2 & M_3 & M_{n-1} \\ M_3 & M_4 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-5}} = A_5 + \frac{\varphi}{k_6},$$

d'où

$$A_5 = \cfrac{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_2 & M_3 & M_4 \\ M_3 & M_4 & M_5 \end{vmatrix}}.$$

On entrevoit la loi de formation des symboles k_i et A_i, que nous allons démontrer d'une manière générale.

Appelons $\underset{i}{D}{}^{p}_{p}$ le déterminant suivant :

$$\underset{i}{D}{}^{p}_{p} = \begin{vmatrix} M_i & M_{i+1} & M_{i+2} & \dots & M_{i+p-1} \\ M_{i+1} & \dots\dots & \dots\dots & \dots & M_{i+p} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ M_{i+p-1} & M_{i+p} & \dots\dots & \dots & M_{i+2p-2} \end{vmatrix};$$

soit $\underset{i}{D}{}^{n}_{p}$ le même déterminant dans lequel on a remplacé, à partir du bas, les éléments de la dernière colonne par les suivants :

$$M_n,\quad M_{n-1},\quad M_{n-2},\quad \dots,\quad M_{n-p+1}.$$

$$k_2 = \frac{\varphi}{\dfrac{1}{\sum\limits_1 M_n \varphi^{n-1}} - \dfrac{1}{M_1}} = -\frac{\sum\limits_1 M_n \varphi^{n-1}}{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}} = A_2 + \frac{\varphi}{k_3},$$

d'où

$$A_2 = -\frac{M_1}{\dfrac{1}{M_1} M_2};$$

$$k_3 = \frac{\varphi}{-\dfrac{\sum\limits_1 M_n \varphi^{n-1}}{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}} + \dfrac{M_1}{\dfrac{1}{M_1} M_2}} = -\frac{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}}{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}} = A_3 + \frac{\varphi}{k_4},$$

d'où

$$A_3 = -\frac{\dfrac{1}{M_1} M_2}{\dfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}};$$

$$k_4 = \frac{\varphi}{\dfrac{\dfrac{1}{M_1}\sum\limits_2 M_n \varphi^{n-2}}{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}} - \dfrac{\dfrac{1}{M_1} M_2}{\dfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}}{\dfrac{\dfrac{1}{M_1}}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}} \sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_{n-1} & M_2 \\ \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \varphi^{n-4}}$$

$$= -\frac{\dfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}}{\dfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}} \sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}} = A_4 + \frac{\varphi}{k_5},$$

d'où

$$A_4 = -\frac{\dfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}};$$

$$k_5 = \cfrac{\varphi}{-\cfrac{\cfrac{1}{M_2}\sum\limits_3 \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-1} \\ M_2 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-3}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}} \sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}} + \cfrac{\cfrac{1}{M_2}\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}}$$

$$= \cfrac{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}} \sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}}{\cfrac{\cfrac{1}{M_2}}{\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}} \sum\limits_5 \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_1 & M_{n-2} \\ M_2 & M_{n-1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \varphi^{n-5}}$$

$$= \cfrac{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}} \sum\limits_4 \begin{vmatrix} M_2 & M_{n-1} \\ M_3 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-4}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}} \sum\limits_5 \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_{n-2} \\ M_2 & M_3 & M_{n-1} \\ M_3 & M_4 & M_n \end{vmatrix} \varphi^{n-5}} = A_5 + \frac{\varphi}{k_6},$$

d'où

$$A_5 = \cfrac{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}{\cfrac{1}{\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_2 & M_3 & M_4 \\ M_3 & M_4 & M_5 \end{vmatrix}}.$$

On entrevoit la loi de formation des symboles k_i et A_i, que nous allons démontrer d'une manière générale.

Appelons $\underset{i}{D}{}_p^p$ le déterminant suivant :

$$\underset{i}{D}{}_p^p = \begin{vmatrix} M_i & M_{i+1} & M_{i+2} & \ldots & M_{i+p-1} \\ M_{i+1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & M_{i+p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ M_{i+p-1} & M_{i+p} & \ldots\ldots & \ldots & M_{i+2p-2} \end{vmatrix};$$

soit $\underset{i}{D}{}_p^n$ le même déterminant dans lequel on a remplacé, à partir du bas, les éléments de la dernière colonne par les suivants :

$$M_n,\ M_{n-1},\ M_{n-2},\ \ldots,\ M_{n-p+1}.$$

Appelons, comme toujours, $\underset{i}{D}{}^n_p(a^\lambda_\mu)$ le mineur correspondant à l'élément de colonne λ et de ligne μ.

Admettons que l'on ait trouvé la relation

$$k_{2p} = -\frac{\dfrac{1}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\sum\limits_{2p-1}\underset{1}{D}{}^n_p\,\varphi^{n-2p+1}}{\dfrac{1}{\underset{1}{D}{}^p_p}\sum\limits_{2p}\underset{2}{D}{}^n_p\,\varphi^{n-2p}} = A_{2p+1} + \frac{\varphi}{k_{2p+1}},$$

d'où

$$(56)\qquad A_{2p} = -\frac{\dfrac{1}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\underset{1}{D}{}^p_p}{\dfrac{1}{\underset{1}{D}{}^p_p}\underset{2}{D}{}^p_p};$$

il viendra

$$k_{2p+1} = \frac{\varphi}{-\dfrac{\dfrac{1}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\sum\limits_{2p-1}\underset{1}{D}{}^n_n\,\varphi^{n-2p+1}}{\dfrac{1}{\underset{1}{D}{}^p_p}\sum\limits_{2p}\underset{2}{D}{}^n_p\,\varphi^{n-2p}} + \dfrac{\dfrac{1}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\underset{1}{D}{}^p_p}{\dfrac{1}{\underset{1}{D}{}^p_p}\underset{2}{D}{}^p_p}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\underset{1}{D}{}^p_p}\sum\limits_{2p}\underset{2}{D}{}^n_p\,\varphi^{n-2p}}{\dfrac{1}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\;\dfrac{1}{\underset{2}{D}{}^p_p}\sum\limits_{2p+1}\begin{vmatrix}\underset{1}{D}{}^p_p & \underset{1}{D}{}^{n-1}_p\\ \underset{2}{D}{}^p_p & \underset{2}{D}{}^n_p\end{vmatrix}\varphi^{n-2p-1}};$$

mais on a les relations

$$\underset{1}{D}{}^p_p = \underset{1}{D}{}^n_{p+1}(a^{p+1}_{p+1}),\qquad \underset{1}{D}{}^{n-1}_p = \underset{1}{D}{}^n_{p+1}(a^p_{p+1}),$$

$$\underset{2}{D}{}^p_p = \underset{1}{D}{}^n_{p+1}(a^{p+1}_1),\qquad \underset{2}{D}{}^n_p = \underset{1}{D}{}^n_{p+1}(a^p_1);$$

d'où, en appliquant la formule (14'),

$$\begin{vmatrix}\underset{1}{D}{}^p_p & \underset{1}{D}{}^{n-1}_p\\ \underset{2}{D}{}^p_p & \underset{2}{D}{}^n_p\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}D(a^{p+1}_{p+1}) & D(a^p_{p+1})\\ D(a^{p+1}_1) & D(a^p_1)\end{vmatrix}$$

$$= D^n_{p+1}\,D^n_{p+1}(a^{p+1}_{p+1}\,a^p_1) = \underset{1}{D}{}^n_{p+1}\,\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1};$$

il vient donc

$$k_{2p+1} = \frac{\dfrac{1}{{}_{1}\mathrm{D}_{p}^{p}} \sum\limits_{2p} {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{n}\, \varphi^{n-2p}}{\dfrac{1}{{}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}} \sum\limits_{2p+1} {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{n}\, \varphi^{n-2p-1}} = \mathrm{A}_{2p+1} + \frac{\varphi}{k_{2p+2}},$$

d'où

$$(56') \qquad \mathrm{A}_{2p+1} = \frac{\dfrac{1}{{}_{1}\mathrm{D}_{p}^{p}}\, {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}}{\dfrac{1}{{}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}}\, {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{p+1}}.$$

Il viendra

$$k_{2p+1} = \cfrac{\varphi}{\cfrac{\dfrac{1}{{}_{1}\mathrm{D}_{p}^{p}} \sum\limits_{2p} {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{n}\, \varphi^{n-2p}}{\dfrac{1}{{}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}} \sum\limits_{2p+1} {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{n}\, \varphi^{n-2p-1}} - \cfrac{\dfrac{1}{{}_{1}\mathrm{D}_{p}^{p}}\, {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}}{\dfrac{1}{{}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}}\, {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{p+1}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{{}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}} \sum\limits_{2p+1} {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{n}\, \varphi^{n-2p-1}}{\dfrac{1}{{}_{1}\mathrm{D}_{p}^{p}}\, \dfrac{1}{{}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{p+1}} \sum\limits_{2p+2} \begin{vmatrix} {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{n-1} & {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p} \\ {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{n} & {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{p+1} \end{vmatrix} \varphi^{n-2p-2}}.$$

Mais on a les relations

$$ {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{n-1} = {}_{0}\mathrm{D}_{p+2}^{n}(a_1^1\, a_{p+2}^{p+1}), \qquad {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p} = {}_{0}\mathrm{D}_{p+2}^{n}(a_1^1\, a_{p+2}^{p+2}),$$
$$ {}_{1}\mathrm{D}_{p}^{n} = {}_{0}\mathrm{D}_{p+2}^{n}(a_1^{p+1}), \qquad {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{p+1} = {}_{0}\mathrm{D}_{p+2}^{n}(a_1^{p+2}),$$

d'où, en appliquant la formule (11'),

$$\begin{vmatrix} {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{n-1} & {}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p} \\ {}_{1}\mathrm{D}_{p-1}^{n} & {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{p+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{D}(a_1^1\, a_{p+2}^{p+1}) & \mathrm{D}(a_1^1\, a_{p+2}^{p+2}) \\ \mathrm{D}(a_1^{p+1}) & \mathrm{D}(a_1^{p+2}) \end{vmatrix}$$
$$= -\, {}_{0}\mathrm{D}_{p+2}^{n}(a_1^1)\, {}_{0}\mathrm{D}_{p+2}^{n}(a_1^{p+1}\, a_{p+2}^{p+2}) = -\, {}_{2}\mathrm{D}_{p+1}^{n}\, {}_{1}\mathrm{D}_{p}^{p},$$

et, par suite,

$$k_{2p+2} = -\frac{\dfrac{1}{{}_{2}\mathrm{D}_{p}^{p}} \sum\limits_{2p+1} {}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{n}\, \varphi^{n-2p-1}}{\dfrac{1}{{}_{1}\mathrm{D}_{p+1}^{p+1}} \sum\limits_{2p+2} {}_{2}\mathrm{D}_{p+1}^{n}\, \varphi^{n-2p-2}} = \mathrm{A}_{2p+2} + \frac{\varphi}{k_{2p+3}},$$

d'où

$$A_{2p+2} = -\frac{\dfrac{1}{\underset{2}{D}{}^{p}_{p}}\,\underset{1}{D}{}^{p+1}_{p+1}}{\dfrac{1}{\underset{1}{D}{}^{p+1}_{p+1}}\,\underset{2}{D}{}^{p+1}_{p+1}},$$

ce qui démontre que la loi soupçonnée est générale.

Nous avons supposé implicitement dans tous ces calculs qu'aucun des déterminants

$$\underset{1}{D}{}^{p}_{p},\quad \underset{2}{D}{}^{p}_{p}$$

n'était nul.

Nous avons donc les formules

$$A_{2p-1} = \frac{\left(\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}\right)^2}{\underset{1}{D}{}^{p-1}_{p-1}\,\underset{1}{D}{}^{p}_{p}} = \frac{1}{\left(\dfrac{\underset{1}{D}{}^{p-1}_{p-1}}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\right)\left(\dfrac{\underset{1}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\right)},$$

$$A_{2p} = -\frac{\left(\underset{1}{D}{}^{p}_{p}\right)^2}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}\,\underset{2}{D}{}^{p}_{p}} = -\left(\frac{\underset{1}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}}\right)\left(\frac{\underset{1}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{2}{D}{}^{p}_{p}}\right),$$

avec la notation

$$\underset{i}{D}{}^{p}_{p} = \begin{vmatrix} M_i & M_{i+1} & M_{i+2} & \dots & M_{i+p-1} \\ M_{i+1} & M_{i+2} & M_{i+3} & \dots & M_{i+p} \\ M_{i+2} & M_{i+3} & M_{i+4} & \dots & M_{i+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{i+p-1} & M_{i+p} & M_{i+p+1} & \dots & M_{i+2p-2} \end{vmatrix}.$$

Considérons l'opération symbolique Δ définie par l'égalité

$$\Delta M_i = M_{i+1} - M_i;$$

il est facile de se rendre compte qu'en appliquant les propriétés élémentaires des déterminants on pourra écrire

$$\underset{i}{D}{}^{p}_{p} = \begin{vmatrix} M_i & M_{i+1} & M_{i+2} & \dots & M_{i+p-1} \\ \Delta M_i & \Delta M_{i+1} & \Delta M_{i+2} & \dots & \Delta M_{i+p-1} \\ \Delta^2 M_i & \Delta^2 M_{i+1} & \Delta^2 M_{i+2} & \dots & \Delta^2 M_{i+p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{p-1} M_i & \Delta^{p-1} M_{i+1} & \Delta^{p-1} M_{i+2} & \dots & \Delta^{p-1} M_{i+p-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} M_i & \Delta M_i & \Delta^2 M_i & \dots & \Delta^{p-1} M_i \\ \Delta M_i & \Delta^2 M_i & \Delta^3 M_i & \dots & \Delta^{p} M_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{p-1} M_i & \Delta^{p} M_i & \Delta^{p+1} M_i & \dots & \Delta^{2p-2} M_i \end{vmatrix}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que ${}_{i}D^{p}_{p}$ rentre dans la classe des déterminants étudiée au Chapitre II.

Rappelons les formules obtenues à ce sujet

$$(17) \qquad (D^{p-1}_{p-1} + \Delta D^{p-1}_{p-1}) D^{p-1}_{p-1} \Delta \frac{D^{i}_{p-1}}{D^{p-1}_{p-1}} = D^{i}_{p}(D^{p-2}_{p-2} + \Delta D^{p-2}_{p-2});$$

cette formule devient, lorsque l'on y fait $i = p$,

$$(17') \qquad (D^{p-1}_{p-1} + \Delta D^{p-1}_{p-1}) D^{p-1}_{p-1} \Delta \frac{D^{p}_{p-1}}{D^{p-1}_{p-1}} = D^{p}_{p}(D^{p-2}_{p-2} + \Delta D^{p-2}_{p-2}),$$

d'où, en divisant membre à membre et en posant

$$\theta^{i}_{p} = \frac{D^{i}_{p}}{D^{p}_{p}},$$

il vient

$$(18) \qquad \theta^{i}_{p} = \frac{\Delta\theta^{i}_{p-1}}{\Delta\theta^{p}_{p-1}},$$

formule que nous utiliserons bientôt pour le calcul de θ^{i}_{p}.

Nous avons, par la définition même du symbole Δ,

$${}_{i}D^{p}_{p} + \Delta\, {}_{i}D^{p}_{p} = {}_{i+1}D^{p}_{p}.$$

La formule précédente (17′) devient donc

$${}_{i}D^{p-1}_{p-1}\, {}_{i+1}D^{p-1}_{p-1}\, \Delta\, {}_{i}\theta^{p}_{p-1} = {}_{i}D^{p}_{p}\, {}_{i+1}D^{p-2}_{p-2},$$

ou, sous une forme plus commode pour le calcul,

$$\frac{{}_{i}D^{p}_{p}}{{}_{i}D^{p-1}_{p-1}} = \frac{{}_{i+1}D^{p-1}_{p-1}}{{}_{i+1}D^{p-2}_{p-2}}\, \Delta\, {}_{i}\theta^{p}_{p-1}.$$

cette relation donne par récurrence

$$\frac{\underset{i+1}{D}{}^{p-1}_{p-1}}{\underset{i+1}{D}{}^{p-2}_{p-2}} = \frac{\underset{i+2}{D}{}^{p-2}_{p-2}}{\underset{i+2}{D}{}^{p-3}_{p-3}} \Delta \underset{i+1}{\theta}{}^{p-1}_{p-2},$$

$$\frac{\underset{i+2}{D}{}^{p-2}_{p-2}}{\underset{i+2}{D}{}^{p-3}_{p-3}} = \frac{\underset{i+3}{D}{}^{p-3}_{p-3}}{\underset{i+3}{D}{}^{p-4}_{p-4}} \Delta \underset{i+2}{\theta}{}^{p-2}_{p-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\underset{i+p-3}{D}{}^{3}_{3}}{\underset{i+p-3}{D}{}^{2}_{2}} = \frac{\underset{i+p-2}{D}{}^{2}_{2}}{\underset{i+p-2}{D}{}^{1}_{1}} \Delta \underset{i+p+3}{\theta}{}^{3}_{2},$$

$$\frac{\underset{i+p-2}{D}{}^{2}_{2}}{\underset{i+p-2}{D}{}^{1}_{1}} = M_{i+p-1} \Delta \underset{i+p-2}{\theta}{}^{2}_{1},$$

d'où, en multipliant membre à membre cette série de relations, on a

$$\frac{\underset{i}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{i}{D}{}^{p-1}_{p-1}} = M_{i+p-1} \Delta \underset{i}{\theta}{}^{p}_{p-1} \Delta \underset{i+1}{\theta}{}^{p-1}_{p-2} \Delta \underset{i+2}{\theta}{}^{p-2}_{p-3} \dots \Delta \underset{i+p-2}{\theta}{}^{2}_{1}. \tag{57}$$

La relation ci-dessus

$$\frac{\underset{i}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{i}{D}{}^{p-1}_{p-1}} = \frac{\underset{i+1}{D}{}^{p-1}_{p-1}}{\underset{i+1}{D}{}^{p-2}_{p-2}} \Delta \underset{i}{\theta}{}^{p}_{p-1}$$

donne également par récurrence

$$\frac{\underset{i}{D}{}^{p-1}_{p-1}}{\underset{i}{D}{}^{p-2}_{p-2}} = \frac{\underset{i+1}{D}{}^{p-2}_{p-2}}{\underset{i+1}{D}{}^{p-3}_{p-3}} \Delta \underset{i}{\theta}{}^{p-1}_{p-2},$$

$$\frac{\underset{i}{D}{}^{p-2}_{p-2}}{\underset{i}{D}{}^{p-3}_{p-3}} = \frac{\underset{i+1}{D}{}^{p-3}_{p-3}}{\underset{i+1}{D}{}^{p-4}_{p-4}} \Delta \underset{i}{\theta}{}^{p-2}_{p-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\underset{i}{D}{}^{3}_{3}}{\underset{i}{D}{}^{2}_{2}} = \frac{\underset{i+1}{D}{}^{2}_{2}}{\underset{i+1}{D}{}^{1}_{1}} \Delta \underset{i}{\theta}{}^{3}_{2},$$

$$\frac{\underset{i}{D}{}^{2}_{2}}{M_i} = \underset{i+1}{D}{}^{1}_{1} \Delta \underset{i}{\theta}{}^{2}_{1},$$

d'où, en multipliant membre à membre, on a

$$(58)\qquad \frac{\underset{i}{\mathrm{D}}{}_p^p}{\underset{i+1}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}} = \mathrm{M}_i\, \Delta\underset{i}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{i}{\theta}{}_{p-2}^{p-1}\, \Delta\underset{i}{\theta}{}_{p-3}^{p-2} \ldots \Delta\underset{i}{\theta}{}_1^2.$$

Les deux relations (57), (58), divisées l'une par l'autre, donnent

$$(58')\qquad \frac{\underset{i}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}}{\underset{i+1}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}} = \frac{\mathrm{M}_i\, \Delta\underset{i}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{i}{\theta}{}_{p-2}^{p-1}\, \Delta\underset{i}{\theta}{}_{p-3}^{p-2} \ldots \Delta\underset{i}{\theta}{}_1^2}{\mathrm{M}_{i+p-1}\, \Delta\underset{i}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{i+1}{\theta}{}_{p-2}^{p-1}\, \Delta\underset{i+2}{\theta}{}_{p-3}^{p-2} \ldots \Delta\underset{i+p-2}{\theta}{}_1^2}.$$

En particulier, on a

$$(59)\qquad \begin{cases} \dfrac{\underset{1}{\mathrm{D}}{}_p^p}{\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}} = \mathrm{M}_1\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p-2}^{p-1} \ldots \Delta\underset{1}{\theta}{}_1^2, \\[2ex] \dfrac{\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}}{\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}} = \dfrac{\mathrm{M}_1\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p-2}^{p-1} \ldots \Delta\underset{1}{\theta}{}_1^2}{\mathrm{M}_p\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{2}{\theta}{}_{p-2}^{p-1} \ldots \Delta\underset{p-1}{\theta}{}_1^2}, \\[2ex] \dfrac{\underset{1}{\mathrm{D}}{}_p^p}{\underset{2}{\mathrm{D}}{}_p^p} = \dfrac{\mathrm{M}_1\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p}^{p+1}\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p-2}^{p-1} \ldots \Delta\underset{1}{\theta}{}_1^2}{\mathrm{M}_{p+1}\, \Delta\underset{1}{\theta}{}_{p}^{p+1}\, \Delta\underset{2}{\theta}{}_{p-1}^{p}\, \Delta\underset{3}{\theta}{}_{p-2}^{p-1} \ldots \Delta\underset{p}{\theta}{}_1^2}, \end{cases}$$

formules d'où l'on déduit immédiatement les expressions de A_{2p-1} et A_{2p}.

On peut en déduire également, par voie de récurrence, l'expression de $\underset{i}{\mathrm{D}}{}_p^p$.

Il nous reste à indiquer une méthode de calcul de l'expression $\Delta\underset{i}{\theta}{}_p^{p+1}$.

Considérons la suite

$$\mathrm{M}_i,\quad \mathrm{M}_{i+1},\quad \mathrm{M}_{i+2},\quad \mathrm{M}_{i+3},\quad \mathrm{M}_{i+4},\quad \ldots.$$

On a, par définition,

$$\theta_1^p = \frac{\mathrm{M}_{i+p-1}}{\mathrm{M}_i}.$$

On aura donc, en divisant les termes de cette suite par le premier,

$$1,\quad \theta_1^2,\quad \theta_1^3,\quad \theta_1^4,\quad \theta_1^5,\quad \ldots.$$

Effectuons l'opération symbolique Δ sur les termes de cette suite, on aura

$$\Delta\theta_1^2, \quad \Delta\theta_1^3, \quad \Delta\theta_1^4, \quad \Delta\theta_1^5, \quad \ldots.$$

Or, la formule établie au Chapitre II et que nous avons rappelée plus haut donne pour $p = 2$

$$\theta_2^i = \frac{\Delta\theta_1^i}{\Delta\theta_1^2};$$

par conséquent, en divisant les termes de cette suite par le premier, la suite deviendra

$$1, \quad \theta_2^3, \quad \theta_2^4, \quad \theta_2^5, \quad \theta_2^6, \quad \ldots.$$

Effectuons sur les termes de cette suite l'opération symbolique Δ, il vient

$$\Delta\theta_2^3, \quad \Delta\theta_2^4, \quad \Delta\theta_2^5, \quad \Delta\theta_2^6, \quad \ldots,$$

et, comme on a la formule

$$\theta_3^i = \frac{\Delta\theta_2^i}{\Delta\theta_2^3}$$

en divisant par $\Delta\theta_2^3$ les termes de cette suite, on aura

$$1, \quad \theta_3^4, \quad \theta_3^5, \quad \theta_3^6, \quad \ldots$$

et ainsi de suite; on est donc en possession d'un procédé pour calculer l'expression $\Delta\theta_p^{p+1}$.

Donnons maintenant quelques applications des formules que nous venons d'établir.

I. Soit le développement suivant (¹)

$$\frac{x}{a+\lambda} + \frac{x^2}{(a+\lambda)(a+2\lambda)} + \frac{x^3}{(a+\lambda)(a+2\lambda)(a+3\lambda)} + \frac{x^4}{(a+\lambda)(a+2\lambda)(a+3\lambda)(a+4\lambda)} + \ldots.$$

(¹) Dans les développements que nous considérons, nous supposons tous les termes positifs; si les termes étaient alternativement positifs et négatifs, ce qui revient à changer x en $(-x)$, il est facile de voir que les valeurs obtenues pour A_{2p}, A_{2p+1} seraient les mêmes que dans le premier cas, sauf le signe de A_{2p+1} qui serait changé.

Considérons la suite

$$\frac{1}{(a+\lambda)\ldots(a+i\lambda)},$$

$$\frac{1}{(a+\lambda)\ldots(a+i\lambda)[a+(i+1)\lambda]},$$

$$\frac{1}{(a+\lambda)\ldots[a+(i+1)\lambda][a+(i+2)\lambda]},$$

$$\frac{1}{(a+\lambda)\ldots[a+(i+3)\lambda]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En divisant par le premier terme, nous aurons les valeurs de $\underset{i}{\theta}{}_1^p$

$$1,\quad \frac{1}{a+(i+1)\lambda},\quad \frac{1}{[a+(i+1)\lambda][a+(i+2)\lambda]},$$

$$\frac{1}{[a+(i+1)\lambda][a+(i+2)\lambda][a+(i+3)\lambda]},\quad \ldots.$$

Effectuons sur les termes de cette suite l'opération symbolique Δ ainsi définie

$$\Delta\underset{i}{\theta}{}_1^p = \underset{i+1}{\theta}{}_1^p - \underset{i}{\theta}{}_1^p,$$

la suite deviendra

$$-\frac{\lambda}{[a+(i+1)\lambda][a+(i+2)\lambda]},$$

$$-\frac{2\lambda}{[a+(i+1)\lambda][a+(i+2)\lambda][a+(i+3)\lambda]},$$

$$-\frac{3\lambda}{[a+(i+1)\lambda]\ldots[a+(i+4)\lambda]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Divisons par le premier terme pour avoir les valeurs de $\underset{i}{\theta}{}_2^p$,

$$1,\quad \frac{2}{a+(i+3)\lambda},\quad \frac{3}{[a+(i+3)\lambda][a+(i+4)\lambda]},$$

$$\frac{4}{[a+(i+3)\lambda]\ldots[a+(i+5)\lambda]},\quad \ldots.$$

Effectuons l'opération symbolique Δ, on a

$$-\frac{2}{[a+(i+3)\lambda][a+(i+4)\lambda]},$$
$$-\frac{3.2.\lambda}{[a+(i+3)\lambda]\ldots[a+(i+5)\lambda]},$$
$$-\frac{4.3.\lambda}{[a+(i+3)\lambda]\ldots[a+(i+6)\lambda]},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En divisant par le premier terme, nous aurons les valeurs de θ_{3}^{p} (indice inférieur gauche i)

$$1,\quad \frac{3}{a+(i+5)\lambda},\quad \frac{\frac{3.4}{1.2}}{[a+(i+5)\lambda][a+(i+6)\lambda]},$$
$$\frac{\frac{4.5}{1.2}}{[a+(i+5)\lambda]\ldots[a+(i+7)\lambda]},\quad \ldots;$$

l'opération symbolique Δ donne

$$-\frac{3\lambda}{[a+(i+5)\lambda][a+(i+6)\lambda]},$$
$$-\frac{3.4.\lambda}{[a+(i+5)\lambda]\ldots[a+(i+7)\lambda]},$$
$$-\frac{\frac{3.4.5}{1.2}\lambda}{[a+(i+5)\lambda]\ldots[a+(i+8)\lambda]},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On reconnaît la loi qu'il serait facile de vérifier

$$\Delta{}_{i}\theta_{p}^{p+1} = -\frac{p\lambda}{[a+(i+2p-1)\lambda][a+(i+2p)\lambda]}.$$

Nous avons donc

$$\Delta{}_{1}\theta_{p-1}^{p} = -\frac{(p-1)\lambda}{[a+(2p-2)\lambda][a+(2p-1)\lambda]},$$
$$\Delta{}_{1}\theta_{p-2}^{p-1} = -\frac{(p-2)\lambda}{[a+(2p-4)\lambda][a+(2p-3)\lambda]},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta{}_{1}\theta_{2}^{3} = -\frac{2\lambda}{(a+4\lambda)(a+5\lambda)},$$
$$\Delta{}_{1}\theta_{1}^{2} = -\frac{\lambda}{(a+2\lambda)(a+3\lambda)},$$
$$M_{1} = \frac{1}{a+\lambda},$$

$$\Delta\theta^{p}_{\substack{p-1\\1}} = -\frac{(p-1)\lambda}{[a+(2p-2)\lambda][a+(2p-1)\lambda]},$$

$$\Delta\theta^{p-1}_{\substack{p-2\\2}} = -\frac{(p-2)\lambda}{[a+(2p-3)\lambda][a+(2p-2)\lambda]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Delta\,\theta^{\,3}_{\substack{2\\p-2}} = -\frac{2\lambda}{[a+(p+1)\lambda][a+(p+2)\lambda]},$$

$$\Delta\,\theta^{\,2}_{\substack{1\\p-1}} = -\frac{\lambda}{(a+p\lambda)[a+(p+1)\lambda)]},$$

$$M_p = \frac{1}{(a+\lambda)(a+2\lambda)\ldots[a+(p-1)\lambda](a+p\lambda)}.$$

On aura donc, par l'application des formules

$$\frac{\underset{1}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}} = (-1)^{p-1}\frac{\lambda^{p-1|\lambda}}{(a+\lambda)^{2p-1|\lambda}},$$

$$\frac{\underset{1}{D}{}^{p-1}_{p-1}}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}} = (a+p\lambda)^{p-1|\lambda},$$

d'où

$$\frac{\underset{1}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{2}{D}{}^{p}_{p}} = [a+(p+1)\lambda]^{p|\lambda}.$$

Il en résulte

$$A_{2p-1} = (-1)^{p-1}\frac{(a+\lambda)^{2p-1|\lambda}}{\lambda^{p-1|\lambda}(a+p\lambda)^{p-1|\lambda}}$$

$$= (-1)^{p-1}[a+(2p-1)\lambda]\frac{(a+\lambda)^{p-1|\lambda}}{\lambda^{p-1|\lambda}}$$

$$= (-1)^{p-1}[a+(2p-1)\lambda]\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)^{p-1|1},$$

$$A_{2p} = (-1)^{p}\frac{\lambda^{p-1|\lambda}[a+(p+1)\lambda]^{p|\lambda}}{(a+\lambda)^{2p-1|\lambda}}$$

$$= (-1)^{p}(a+2p\lambda)\frac{\lambda^{p-1|\lambda}}{(a+\lambda)^{p|\lambda}}$$

$$= (-1)^{p}\left(2+\frac{a}{p\lambda}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)^{p|1}}.$$

Considérons en particulier la série

$$e^{x} = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{1.2}+\frac{x^{3}}{1.2.3}+\ldots.$$

Effectuons l'opération symbolique Δ, on a

$$-\frac{2}{[a+(i+3)\lambda][a+(i+4)\lambda]},$$
$$-\frac{3.2.\lambda}{[a+(i+3)\lambda]\ldots[a+(i+5)\lambda]},$$
$$-\frac{4.3.\lambda}{[a+(i+3)\lambda]\ldots[a+(i+6)\lambda]},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En divisant par le premier terme, nous aurons les valeurs de $\theta^p_{i\,3}$

$$1,\quad \frac{3}{a+(i+5)\lambda},\quad \frac{\frac{3.4}{1.2}}{[a+(i+5)\lambda][a+(i+6)\lambda]},$$
$$\frac{\frac{4.5}{1.2}}{[a+(i+5)\lambda]\ldots[a+(i+7)\lambda]},\quad \ldots;$$

l'opération symbolique Δ donne

$$-\frac{3\lambda}{[a+(i+5)\lambda][a+(i+6)\lambda]},$$
$$-\frac{3.4.\lambda}{[a+(i+5)\lambda]\ldots[a+(i+7)\lambda]},$$
$$-\frac{\frac{3.4.5}{1.2}\lambda}{[a+(i+5)\lambda]\ldots[a+(i+8)\lambda]},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On reconnaît la loi qu'il serait facile de vérifier

$$\Delta\theta^{p+1}_{i\,p} = -\frac{p\lambda}{[a+(i+2p-1)\lambda][a+(i+2p)\lambda]}.$$

Nous avons donc

$$\Delta\theta^{p}_{1\,p-1} = -\frac{(p-1)\lambda}{[a+(2p-2)\lambda][a+(2p-1)\lambda]},$$
$$\Delta\theta^{p-1}_{1\,p-2} = -\frac{(p-2)\lambda}{[a+(2p-4)\lambda][a+(2p-3)\lambda]},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta\theta^{3}_{1\,2} = -\frac{2\lambda}{(a+4\lambda)(a+5\lambda)},$$
$$\Delta\theta^{2}_{1\,1} = -\frac{\lambda}{(a+2\lambda)(a+3\lambda)},$$
$$M_1 = \frac{1}{a+\lambda},$$

$$\Delta\underset{1}{\theta}{}^{p}_{p-1} = -\frac{(p-1)\lambda}{[a+(2p-2)\lambda][a+(2p-1)\lambda]},$$

$$\Delta\underset{2}{\theta}{}^{p-1}_{p-2} = -\frac{(p-2)\lambda}{[a+(2p-3)\lambda][a+(2p-2)\lambda]},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\Delta\underset{p-2}{\theta}{}^{3}_{2} = -\frac{2\lambda}{[a+(p+1)\lambda][a+(p+2)\lambda]},$$

$$\Delta\underset{p-1}{\theta}{}^{2}_{1} = -\frac{\lambda}{(a+p\lambda)[a+(p+1)\lambda)]},$$

$$M_p = \frac{1}{(a+\lambda)(a+2\lambda)\ldots[a+(p-1)\lambda](a+p\lambda)}.$$

On aura donc, par l'application des formules

$$\frac{\underset{1}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}} = (-1)^{p-1}\frac{\lambda^{p-1|\lambda}}{(a+\lambda)^{2p-1|\lambda}},$$

$$\frac{\underset{1}{D}{}^{p-1}_{p-1}}{\underset{2}{D}{}^{p-1}_{p-1}} = (a+p\lambda)^{p-1|\lambda},$$

d'où

$$\frac{\underset{1}{D}{}^{p}_{p}}{\underset{2}{D}{}^{p}_{p}} = [a+(p+1)\lambda]^{p|\lambda}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} A_{2p-1} &= (-1)^{p-1}\frac{(a+\lambda)^{2p-1|\lambda}}{\lambda^{p-1|\lambda}(a+p\lambda)^{p-1|\lambda}} \\ &= (-1)^{p-1}[a+(2p-1)\lambda]\frac{(a+\lambda)^{p-1|\lambda}}{\lambda^{p-1|\lambda}} \\ &= (-1)^{p-1}[a+(2p-1)\lambda]\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)^{p-1|1}, \\ A_{2p} &= (-1)^{p}\frac{\lambda^{p-1|\lambda}[a+(p+1)\lambda]^{p|\lambda}}{(a+\lambda)^{2p-1|\lambda}} \\ &= (-1)^{p}(a+2p\lambda)\frac{\lambda^{p-1|\lambda}}{(a+\lambda)^{p|\lambda}} \\ &= (-1)^{p}\left(2+\frac{a}{p\lambda}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)^{p|1}}. \end{aligned}$$

Considérons en particulier la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Il suffit de faire, dans les formules ci-dessus,

$$a = 0, \qquad \lambda = 1,$$

d'où l'on a

$$A_{2p-1} = (-1)^{p-1}(2p-1),$$
$$A_{2p} \;= (-1)^{p}\,2;$$

on a donc

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{-2 + \cfrac{x}{-3 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{5 + \ldots}}}}}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve

$$e^x = 1,6487,$$

valeur exacte jusqu'à la quatrième décimale.

Pour $x = 1$, on a

$$e = \frac{106}{39} = 2,7179,$$

valeur approchée à 0,0003 près.

Pour $x = -1$, on a

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{32}{87} = 0,3678,$$

valeur exacte jusqu'à la quatrième décimale.

II. Considérons comme second exemple le développement

$$\frac{x}{(a+\lambda)(a+2\lambda)\ldots[a+(k+1)\lambda]} + \frac{x^2}{(a+2\lambda)\ldots[a+(k+2)\lambda]} + \frac{x^3}{(a+3\lambda)\ldots[a+(k+3)\lambda]} + \ldots\ldots$$

En suivant la même marche que précédemment, on est conduit

aux formules

$$A_{2p-1} = \frac{(a+\lambda)^{p-1|\lambda}(a+\lambda)^{k+2p-1|\lambda}}{[(k+1)\lambda]^{p-1|\lambda}\lambda^{p-1|\lambda}[a+(k+p)\lambda]^{p-1|\lambda}}$$

$$= [a+(k+2p-1)\lambda]\frac{(a+\lambda)^{p-1|\lambda}(a+\lambda)^{k+p-1|\lambda}}{[(k+1)\lambda]^{p-1|\lambda}\lambda^{p-1|\lambda}},$$

$$A_{2p} = -\frac{[(k+1)\lambda]^{p-1|\lambda}\lambda^{p-1|\lambda}[a+(k+p+1)\lambda]^{p|\lambda}}{(a+\lambda)^{k+2p-1|\lambda}(a+\lambda)^{p|\lambda}}$$

$$= -[a+(k+2p)\lambda]\frac{[(k+1)\lambda]^{p-1|\lambda}\lambda^{p-1|\lambda}}{(a+\lambda)^{p|\lambda}(a+\lambda)^{k+p|\lambda}}.$$

Considérons en premier lieu le développement

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Il faudra faire, dans les formules qui précèdent,

$$a = 0, \quad \lambda = 1, \quad k = 0,$$

d'où il vient

$$A_{2p-1} = 2p - 1, \quad A_{2p} = \frac{2}{p},$$

donc

$$L(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{5-\cfrac{x}{\frac{2}{3}}+\dots}}}}}$$

Pour $x = 1$, on trouve

$$L2 = \frac{131}{184} = 0,69312,$$

valeur exacte jusqu'à la quatrième décimale.

Pour $x = 2$, on a

$$L3 = \frac{56}{51} = 1,098,$$

valeur approchée à 0,001 près.

Considérons en second lieu le développement

$$\text{arc tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

qui donne par un changement de variables

$$\frac{\text{arc tang} \sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 1 - \frac{y}{3} + \frac{y^2}{5} - \frac{y^3}{7} + \ldots.$$

Il faudra faire, dans les formules qui précèdent,

$$a = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad k = 0,$$

d'où il vient

$$A_{2p-1} = -(4p-1)\frac{(3^{p-1|2})^2}{(2^{p-1|2})^2}, \qquad A_{2p} = -(4p+1)\frac{(2^{p-1|2})^2}{(3^{p-1|2})^2}.$$

On trouve ainsi

$$\frac{\text{arc tang} \sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 1 + \cfrac{y}{-3 + \cfrac{y}{-\frac{5}{9} + \cfrac{y}{-\frac{63}{4} + \cfrac{y}{-\frac{4}{25} + \ldots}}}}$$

Pour $x = 1$, on a

$$\text{arc tang } 1 = 0{,}7855,$$

valeur exacte jusqu'à la quatrième décimale.

Pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\frac{\text{arc tang}\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 0{,}87043,$$

valeur approchée à 0,00001 près.

III. Considérons enfin comme dernière application le développement

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}x^2 + \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}x^3 + \ldots.$$

En suivant la même marche que précédemment, on trouverait

$$A_{2p-1} = (-1)^{p-1}(2p-1)\frac{(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|1}},$$

$$A_{2p} = (-1)^{p}2\frac{m^{p|1}}{(m-1)^{p|-1}}.$$

En particulier, pour $m = \frac{1}{2}$, on trouve

$$A_{2p-1} = 2, \quad A_{2p} = 2,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{1+x} = 1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{2 + \dots}},$$

formule bien connue.

De même, si l'on pose $x = \frac{y}{m}$ et si l'on fait tendre m vers l'infini, on trouve

$$\lim A_{2p-1} = (-1)^{p-1}(2p-1)\frac{1}{m},$$
$$\lim A_{2p} = (-1)^{p}2m,$$

et, en prenant y comme variable indépendante, on a

$$A_{2p-1} = (-1)^{p-1}(2p-1), \qquad A_{2p} = (-1)^{p}2,$$

valeurs que nous avons déjà trouvées dans le cas de e^x qui est précisément égal à la limite pour $m = \infty$ de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$.

Les formules (54′), (54″), (54‴) procédant suivant les puissances croissantes de y, on peut les transformer en fractions continues au moyen des formules données précédemment.

En particulier, la formule (55), donnant la racine a de l'équation $\varphi(x) = 0$, deviendra, en se bornant aux trois premiers termes,

$$a = x + \cfrac{\varphi}{-\cfrac{d\varphi}{dx} + \varphi\cfrac{\cfrac{d^2\varphi}{dx^2}}{2\cfrac{d\varphi}{dx}}}.$$

Appliquons cette formule à la recherche de la racine minima de l'équation

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{2} = 0,$$

nous savons que la valeur exacte de cette racine est $\frac{\pi}{6}$, et nous prendrons comme valeur approchée

$$x' = 0,52011,$$

à laquelle conduiraient les méthodes données au Chapitre précédent. On a

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x'} = \cos x' = 0,86777,$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x'} = -\sin x' = -0,49697,$$

$$\varphi(x') = \sin x' - 0,5 = -0,00303,$$

d'où

$$a = 0,52011 - \frac{0,00303}{-0,86777 + \frac{0,00303}{2}\frac{0,49697}{0,86777}} = 0,523605,$$

valeur exacte jusqu'à la cinquième décimale.

Les calculs précédents ont été faits avec les Tables de M. Vassal (Gauthier-Villars et fils).

VIII. — Les équations différentielles à coefficients constants.

Considérons en premier lieu une équation sans second membre

$$(60) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n y = 0.$$

En dérivant i fois de suite, il vient

$$\frac{d^{n+i} y}{dx^{n+i}} + p_1 \frac{d^{n+i-1} y}{dx^{n+i-1}} + \ldots + p_{n-1}\frac{d^{i+1} y}{dx^{i+1}} + p_n \frac{d^i y}{dx^i} = 0.$$

On voit par là que $\frac{d^{n+i} y}{dx^{n+i}}$ est un symbole dont nous avons donné

expression générale (formule 35)

$$\frac{d^{n+i}y}{dx^{n+i}}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}A^{\lambda}_{n+i}\,\frac{d^{n-\lambda}y}{dx^{n-\lambda}}.$$

Si donc, pour une valeur de la variable x, nous nous donnons les valeurs correspondantes de y et de ses $(n-1)$ premières dérivées, la formule précédente donnera pour cette même valeur de x l'expression de $\frac{d^{n+i}y}{dx^{n+i}}$.

Or la formule de Taylor nous donne

$$\Omega_0=\sum\frac{(x-a)^{p-1}}{1^{p-1|1}}\left[\frac{d^{p-1}\Omega_0(x)}{dx^{p-1}}\right]_{x=a},$$

d'où il vient

$$(61)\qquad y=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{d^{n-\lambda}y}{dx^{n-\lambda}}\right)_{x=a}\left[\frac{(x-a)^{n-\lambda}}{1^{n-\lambda|1}}+\sum_{i=0}A^{\lambda}_{n+i}\,\frac{(x-a)^{n+i}}{1^{n+i|1}}\right],$$

en observant que

$$A^{\lambda}_{n-\lambda}=1,\qquad A^{\lambda}_{n-\lambda'}=0.$$

Les conditions initiales sont ainsi nettement indiquées.

Considérons plus particulièrement le coefficient de $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_{x=a}$, qui constitue une solution particulière lorsque, pour $x=a$, y et ses $(n-2)$ premières dérivées ont des valeurs nulles.

Cette solution s'écrit

$$(61')\qquad y=\frac{(x-a)^{n-1}}{1^{n-1|1}}+\sum_{i=0}A^{1}_{n+i}\,\frac{(x-a)^{n+i}}{1^{n+i|1}}$$

$$=\frac{(x-a)^{n-1}}{1^{n-1|1}}\left[1+\sum_{i=0}A^{1}_{n+i}\,\frac{(x-a)^{i+1}}{n^{i+1|1}}\right].$$

Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-y=0,$$

dont l'équation caractéristique

$$\varphi(x) = x^2 - x - 1 = 0$$

a déjà été considérée par nous (p. 37).

La solution particulière ci-dessus devient

$$y = (x-a)\left[1 + \frac{x-a}{2} + \frac{2(x-a)^2}{2.3} + \frac{3(x-a)^3}{2.3.4} + \frac{5(x-a)^4}{2.3.4.5} + \frac{8(x-a)^5}{2.3.4.5.6} + \ldots\right],$$

les coefficients des numérateurs étant donnés par la relation récurrente

$$A_{p+2} - A_{p+1} - A_p = 0.$$

Considérons, en second lieu, une équation différentielle dont l'équation caractéristique ait toutes ses racines égales à a.

Nous avons trouvé dans ce cas [formule (22)]

$$A^1_{n+i} = \frac{n^{i+1|1}}{1^{i+1|1}} a^{i+1}.$$

La solution particulière ci-dessus devient

$$y = \frac{(x-a)^{n-1}}{1^{n-1|1}}\left[1 + \sum_{i=0} \frac{(x-a)^{i+1}}{1^{i+1|1}} a^{i+1}\right]$$
$$= \frac{(x-a)^{n-1}}{1^{n-1|1}}\left[1 + \frac{a(x-a)}{1} + \frac{a^2(x-a)^2}{1.2} + \frac{a^3(x-a)^3}{1.2.3} + \ldots\right]$$
$$= \frac{(x-a)^{n-1}}{1^{n-1|1}} e^{a(x-a)}.$$

Si nous avions considéré l'équation aux différences

$$\Delta^n y + p_1 \Delta^{n-1} y + \ldots + p_{n-1} \Delta y + p_n y = 0,$$

nous aurions trouvé, comme ci-dessus,

$$\Delta^{n+i} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A^\lambda_{n+i} \Delta^{n-\lambda} y.$$

Or, en appelant y_m la valeur correspondante à $x + m\,\Delta x$, on a la relation connue

$$y_m = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{m^{i|-1}}{1^{i|1}} \Delta^i y_0 ;$$

d'où il vient

$$(62) \qquad y_m = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \Delta^{n-\lambda} y_0 \left(\frac{m^{n-\lambda|-1}}{1^{n-\lambda|1}} + \sum_{i=0}^{i=m} \mathrm{A}^{\lambda}_{n+i} \frac{m^{n+i|-1}}{1^{n+i|1}} \right).$$

Considérons une équation différentielle avec second membre

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = z_n.$$

Appelons, pour simplifier, $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, \ldots, z_{n+i}$ les dérivées successives de z_n, et $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots, z_2, z_1, z_0$ les fonctions définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
y &= z_0,\\
\frac{dy}{dx} + p_1 y &= z_1,\\
\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y &= z_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & ,\\
\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y &= z_n,\\
\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + p_1 \frac{d^n y}{dx^n} + p_2 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_n \frac{dy}{dx} &= z_{n+1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & ,\\
\frac{d^{n+i} y}{dx^{n+i}} + p_1 \frac{d^{n+i-1} y}{dx^{n+i-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_n \frac{d^i y}{dx^i} &= z_{n+i},
\end{aligned}$$

C'est un système d'équations analogue au système (19 *a*); on tire donc

$$\frac{d^{n+i} y}{dx^{n+i}} = \sum_{k=0}^{k=n+i} z_{n+i-k} \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k} (-1)^\nu p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_\nu},$$

ou

$$\frac{d^{n+i} y}{dx^{n+i}} = \sum_{k=0}^{k=n+i} \mathrm{A}^1_{n+k-1} z_{n+i-k}.$$

Remarquons que, pour la valeur initiale $x = a$, tous les seconds membres sont connus; on connaît donc également $\frac{d^{n+i}y}{dx^{n+i}}$ pour cette valeur initiale, et il n'y a plus qu'à appliquer la formule de Taylor

$$(63)\quad \begin{cases} y = \sum \frac{(x-a)^{p-1}}{1^{p-1|1}} \left(\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}\right)_{x=a} \\ \quad = \sum \frac{(x-a)^{p-1}}{1^{p-1|1}} \sum_{k=0}^{k=p-1} A^1_{n+k-1} (z_{p-k-1})_{x=a}. \end{cases}$$

Rappelons la formule (29'), d'après laquelle les symboles A^1_{n+k-1} sont obtenus directement par le développement de la fraction $\frac{1}{1+p_1x+p_2x^2+\ldots}$.

La formule (63) constitue la solution générale de l'équation différentielle proposée; elle renferme, en effet, n constantes arbitraires, savoir

$$(z_0)_{x=a}, \quad (z_1)_{x=a}, \quad \ldots, \quad (z_{n-1})_{x=a}.$$

On sait que cette solution générale peut se mettre sous la forme

$$Y + y,$$

Y étant la solution générale de l'équation différentielle lorsqu'on fait abstraction du second membre et y étant une solution particulière de l'équation proposée.

Nous allons déterminer une solution particulière qui se présente sous une forme très simple et d'une interprétation facile.

Considérons le système infini d'équations

$$\begin{aligned} \frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_ny &= z_n, \\ \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + p_1\frac{d^ny}{dx^n} + p_2\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n\frac{dy}{dx} &= z_{n+1}, \\ \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + p_1\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + p_2\frac{d^ny}{dx^n} + \ldots + p_n\frac{d^2y}{dx^2} &= z_{n+2}, \end{aligned}$$

....

Multiplions respectivement ces équations par les coefficients indéterminés

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots,$$

choisis de manière à satisfaire aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
0 &= p_{n-1}\lambda_1 + p_n \quad \lambda_2,\\
0 &= p_{n-2}\lambda_1 + p_{n-1}\lambda_2 + p_n \quad \lambda_3,\\
0 &= p_{n-3}\lambda_1 + p_{n-2}\lambda_2 + p_{n-1}\lambda_3 + p_n\lambda_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En additionnant les équations ainsi multipliées, on trouve

$$\lambda_1 p_n y = \lambda_1 z_n + \lambda_2 z_{n+1} + \lambda_3 z_{n+2} + \ldots = \sum \lambda_i z_{n+i-1};$$

or la comparaison du système de relations ci-dessus avec le système (26″) conduit à poser

$$\lambda_i = A_{n+i-2}^{-1},$$

d'où

$$\lambda_1 = A_{n-1}^{-1} = 1.$$

On a donc la formule simple

(63′) $$p_n y = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_{n+i-2}^{-1} z_{n+i-1}.$$

D'après la formule (29″), les symboles A_{n+i-2}^{-1} seront donnés par le développement de la fraction

$$\frac{1}{1 + \frac{p_{n-1}}{p_n} x + \frac{p_{n-2}}{p_n} x^2 + \ldots + \frac{p_1}{p_n} x^{n-1} + \frac{1}{p_n} x^n} = \sum A_{n+1}^{-1} x^{i+1}.$$

Si donc on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p_n + p_{n-1} x + p_{n-2} x^2 + \ldots + p_1 x^{n-1} + x^n}\\
&\qquad = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,
\end{aligned}$$

on aura

(63″) $$y = a_0 z_n + a_1 z_{n+1} + a_2 z_{n+2} + \ldots = \sum a_i z_{n+i}.$$

Telle est la formule que nous voulions établir et qui n'est, évidemment, susceptible d'applications que si la *série* obtenue est convergente.

En particulier, si z_n est un polynôme entier de degré i, la série ci-dessus sera limitée, puisque, au delà du terme z_{n+i}, les termes sont tous nuls; la formule (63″) est donc applicable.

En considérant l'équation aux différences

$$\Delta^n y + p_1 \Delta^{n-1} y + \ldots + p_n y = z_n,$$

on aurait trouvé de même

$$\Delta^i y = \sum_{k=0}^{k=i} A^1_{n+k-1} z_{i-k},$$

$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ représentant des fonctions dont on connaît les valeurs initiales; $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$ les différences successives de z_n.

En remplaçant dans la formule

$$y_m = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{m^{i|-1}}{1^{i|1}} \Delta^i y_0,$$

il vient

(64) $$y_m = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{m^{i|-1}}{1^{i|1}} \sum_{k=0}^{k=i} A^1_{n+k-1} (z_{i-k})_0$$

pour la solution générale; quant à la solution particulière, on trouverait, comme précédemment,

(64′) $$p_n y_m = \sum A^{-1}_{n+i-2} z_{n+i-1}.$$

Nous dirons un mot, en terminant, des méthodes proposées par Wronski pour la résolution des équations différentielles quelconques, méthodes qui, à proprement parler, ne sont que des moyens d'obtenir une plus grande approximation lorsqu'on a une solution suffisamment approchée.

Rappelons la formule (54″), que nous énoncerons ainsi :

Soit une équation

$$\varphi(x) = 0,$$

et a une solution de cette équation, de telle sorte que

$$\varphi(a) = 0;$$

on a

$$(65)\quad \begin{cases} F(a) = \sum (1-)^k \dfrac{\overline{\varphi(x)}^k}{1^{k|1}} \dfrac{d^k F(x)}{d\overline{\varphi(x)}^k} \\ \quad = F(x) - \dfrac{\varphi(x)}{1} \dfrac{dF(x)}{d\varphi(x)} + \dfrac{\overline{\varphi(x)}^2}{1.2} \dfrac{d^2 F(x)}{d\overline{\varphi(x)}^2} - \ldots. \end{cases}$$

Il est évident, *a priori,* que le second membre sera d'autant plus convergent que x sera plus rapproché de a; car pour $x = a$ la relation se change en une identité

$$F(a) = F(a).$$

Il faut donc connaître une valeur suffisamment approchée, et, en outre, se rendre compte que les formules établies peuvent être acceptées dans cet intervalle.

Wronski fait alors la généralisation suivante :

Soit

$$\varphi(y) = 0$$

une équation quelconque dans laquelle y est une fonction inconnue de x.

On peut appliquer la formule précédente en prenant comme solution approchée non une valeur de la variable indépendante, mais une fonction de x voisine de la solution inconnue y.

Soit ϖ cette solution approchée; la formule ci-dessus devient

$$(66)\quad \begin{cases} F(y) = \sum (-1)^k \dfrac{\overline{\varphi(\varpi)}^k}{1^{k|1}} \dfrac{d^k F(\varpi)}{d\overline{\varphi(\varpi)}^k} \\ \quad = F(\varpi) - \dfrac{\varphi(\varpi)}{1} \dfrac{dF(\varpi)}{d\varphi(\varpi)} + \dfrac{\overline{\varphi(\varpi)}^2}{1.2} \dfrac{d^2 F(\varpi)}{d\overline{\varphi(\varpi)}^2} - \ldots. \end{cases}$$

Il est visible que le second membre sera d'autant plus convergent que ϖ sera plus approché de y; car, pour $\varpi = y$, on a l'identité

$$F(y) = F(y).$$

On devra, en outre, se rendre compte que les formules employées sont bien valables dans l'intervalle que l'on considère.

La formule du changement de variables (52) fait connaître l'expression $\frac{d^k F(w)}{d\varphi(w)^k}$ en fonction de $\frac{d^k F(w)}{\overline{dw}^k}$ et $\frac{d^k \varphi(w)}{\overline{dw}^k}$.

La même formule du changement de variables donnera $\frac{d^k F(w)}{\overline{dw}^k}$ et $\frac{d^k \varphi(w)}{\overline{dw}^k}$ en fonction de $\frac{d^k F(w)}{\overline{dx}^k}$, $\frac{d^k \varphi(w)}{\overline{dx}^k}$, $\frac{d^k (w)}{\overline{dx}^k}$, dérivées qui sont toutes connues, dès que w est une fonction connue de x.

La formule (66) procédant suivant les puissances croissantes de $\varphi(x)$, Wronski propose, en dernier lieu, de la réduire en fraction continue en appliquant les formules précédemment données. En s'arrêtant à un terme quelconque de ce nouveau développement, on obtient ce qu'il appelle les différents *progrès* de la génération de $F(y)$.

Ces progrès ne sont autre chose que des fractions à termes finis représentant la fonction cherchée $F(y)$ dans l'intervalle considéré avec une approximation généralement croissante.

On trouvera des applications de ces méthodes soit dans une série d'articles publiés par M. West dans le *Journal de Liouville* (*Exposé des méthodes générales en Mathématiques, d'après Wronski*), soit dans un article publié par M. Marchand dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (*Sur le changement de variables*).

Vu et approuvé :
Grenoble, le 23 mars 1893.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
RAOULT.

Vu et permis d'imprimer :
Grenoble, le 24 mars 1893.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE GRENOBLE,
GASTON BIZOS.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Principe de Hamilton.

Réduction des équations générales de la Dynamique à la forme canonique.

Principaux théorèmes concernant l'intégration de ces équations.

Vu et approuvé :
Grenoble, le 23 mars 1893.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
RAOULT.

Vu et permis d'imprimer :
Grenoble, le 24 mars 1893.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE GRENOBLE,
GASTON BIZOS.

19680 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.







